**Heinrich-Heine-Universität**
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

**Sommersemester 2024**
12.04.2024

# Homologische Algebra
# Blatt 1

---

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufgaben werden in der Übung besprochen.

## 1 | Stegreiffragen: Kategorien und Funktoren

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie viele verschiedene[1] Kategorien mit 3 Objekten und 4 Morphismen gibt es?

(b) Gibt es eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit zwei Objekten $A$, $B$ und 5 Morphismen, sodass $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)| = 1$ und $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)| = 2$?

(c) Sei $X$ ein topologischer Raum. Definiere $\mathrm{Open}(X)$ durch:

Objekte: offene Teilmengen $U \subseteq X$

Morphismen: Inklusionen, d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(U,V)$ enthält genau dann ein Element, wenn $U \subseteq V$ und ist sonst leer.

Definiert Open(X) eine Kategorie?

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $\mathbf{Set}_{\leqslant n}$ durch:

Objekte: Mengen mit höchstens $n$ Elementen

Morphismen: Abbildungen von Mengen

Definiert $\mathbf{Set}_{\leqslant n}$ eine Kategorie? Was ist wenn $\leqslant$ durch $\geqslant$ oder $=$ ersetzt wird?

(e) Definiere $\mathbf{Set}_{\textsf{non-const}}$ durch:

Objekte: Mengen mit mindestens 2 Elementen

Morphismen: Nicht-konstante Abbildungen von Mengen

Definiert $\mathbf{Set}_{\textsf{non-const}}$ eine Kategorie?

(f) Definiere $\mathbf{Set}_{\textsf{id, non-inv}}$ durch:

Objekte: Mengen

Morphismen: Abbildungen von Mengen, die entweder die Identität sind oder nicht-invertierbar

Definiert $\mathbf{Set}_{\textsf{id,non-inv}}$ eine Kategorie?

(g) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c$ ein Objekt in $\mathcal{C}$. Definiere $\mathrm{const}_c\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ durch $\mathrm{const}_c(x) = c$ auf Objekten und $\mathrm{const}_c(f\colon x \to y) = \mathrm{id}_c$ auf Morphismen. Definiert $\mathrm{const}_c$ einen Funktor?

(h) Die Vergissfunktoren $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ und $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, die einen topologischen Raum als Menge auffassen, bzw. eine abelsche Gruppe als Gruppe, haben einen entscheidenden Unterschied, wenn man sich das Verhalten auf den Morphismen anguckt. Welcher Unterschied ist das?

## 2 | Nicht alles definiert einen Funktor

Sei $G$ eine Gruppe und $Z(G) = \{g \in G \mid hg = hg \quad \forall h \in H\}$ ihr Zentrum. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $Z\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ keinen Funktor definiert.

(Hinweis: Betrachten Sie die folgenden Abbildungen symmetrischer Gruppen $S_2 \to S_3 \to S_2$)

Kennen Sie ein Beipiel (aus der linearen Algebra) für einen Funktor $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$?

---

[1] Wir haben noch nicht über verschiedene Äquivalenzbegriffe von Kategorien gesprochen. Hier ist die naive Variante gefragt (also „bis auf Umbenennung von Objekten und Morphismen“)

**3 | Isomorphismen werden auf Isomorphismen abgebildet, aber nicht reflektiert**

Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f\colon a \to b$ ein Isomorphismus, so auch $F(f)\colon F(a) \to F(b)$.
(b) Finden Sie ein Beispiel, bei dem $F(f)\colon F(a) \to F(b)$ ein Isomorphismus ist, aber $f\colon a \to b$ nicht.

**4 | Simplexkategorie ★**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ die Kategorie mit Objekten $\{0, \ldots, n-1\}$ und jeweils genau einem Morphismus $f\colon a \to b$ wenn $a \leqslant b$ (es ist genau die Kategorie zugehörig zur Ordnung $\leqslant$ auf $\{0, \ldots, n-1\}$).

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Beschreiben Sie $\mathrm{Fun}([0], \mathcal{C})$, $\mathrm{Fun}([1], \mathcal{C})$ und $\mathrm{Fun}([2], \mathcal{C})$.

Sei $\Delta$ die Kategorie mit Objekten $[n]$ und die Morphismen $[a] \to [b]$ sind gegeben durch $\mathrm{Fun}([a], [b])$.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Abbildung in $\mathrm{Fun}([a], [b])$ als endliche Komposition folgener Abbildungen schreiben lässt:

$$\delta_i^n\colon [n-1] \to [n], \quad \delta_i^n(k) = \begin{cases} k & , i < k \\ k+1 & , i \geqslant k \end{cases}$$

$$\sigma_i^n\colon [n+1] \to [n], \quad \sigma_i^n(k) = \begin{cases} k & , i \leqslant k \\ k-1 & , i > k \end{cases}$$

**5 | Kommakategorien ★**

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c$ ein Objekt in $\mathcal{C}$. Definiere $\mathcal{C}/c$ (bzw. $c/\mathcal{C}$) durch:

Objekte: Paare $(a \in \mathcal{C}, f : a \to c)$ (bzw. $(a \in \mathcal{C}, f\colon c \to a)$)

Morphismen: $(a \in \mathcal{C}, f\colon a \to c) \to (b \in \mathcal{C}, g\colon b \to c)$ ist eine Abbildung $h\colon a \to b$, sodass $f = g \circ h$ (bzw. $(a \in \mathcal{C}, f\colon c \to a) \to (b \in \mathcal{C}, g\colon c \to b)$ ist eine Abbildung $h\colon a \to b$, sodass $g = h \circ f$)

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Kategorie definiert.
(b) Beschreiben Sie $U/\mathrm{Open}(X)$ und $\mathrm{Open}(X)/U$ für beliebige offene Teilmengen $U$ in einem topologischen Raum $X$.

Seien $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $G\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Definiere die Kommakategorie $F \downarrow G$ durch:

Objekte: Tripel $(d \in \mathcal{D}, e \in \mathcal{E}, (f\colon F(d) \to G(e)) \in \mathcal{C})$

Morphismen: $(d, e, f) \to (d', e', f')$ ist ein Paar $((h\colon d \to d') \in \mathcal{D}, (k\colon e \to e') \in \mathcal{E})$ sodass $G(k) \circ f = f' \circ F(h)$.

(c) Zeigen Sie, dass dies eine Kategorie definiert.
(d) Beschreiben Sie $c/\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}/c$ als Kommakategorien (Hinweis: Abhängig von der gewählten Konstruktion erhalten Sie nicht exakt das Gleiche wie oben definiert. Es reicht wenn Sie den Unterschied erklären).

Die Projektionsfunktoren $\mathrm{dom}\colon F \downarrow G \to \mathcal{D}$ und $\mathrm{cod} : F \downarrow G \to \mathcal{E}$ sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}((d, e, f\colon d \to e)) = d \quad &\text{and} \quad \mathrm{dom}((h\colon d \to d', k\colon e \to e')) = (h\colon d \to d') \\ \mathrm{cod}((d, e, f\colon d \to e)) = e \quad &\text{and} \quad \mathrm{cod}((h\colon d \to d', k\colon e \to e')) = (k\colon e \to e') \end{aligned}$$

(e) Beschreiben Sie die Funktoren dom und cod für Ihre Konstruktion von $c/\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}/c$.

(Hinweis: Alle Objekte, Morphismen und Bedingungen lassen sich besser durch Diagramme ausdrücken. Zeichnen Sie diese Diagramme.)