

Homologische Algebra Blatt 6

1 | Stegreiffragen: (Ko)Produkte und (Ko)Kerne

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Seien \mathcal{C} , \mathcal{D} Kategorien mit Produkten und $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Wie ist die kanonische Abbildung $F(X \times Y) \rightarrow F(X) \times F(Y)$ definiert?
- (b) Wahr oder falsch: Jeder Funktor $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ erhält Produkte.
- (c) Was sind Produkte und Koprodukte in partiell geordneten Mengen?
- (d) Was sind Produkte und Koprodukte in der Kategorie der natürlichen Zahlen und Morphismen $k \rightarrow n$ genau dann, wenn $k \mid n$ („ k teilt n “)?
- (e) Wie sehen Kerne und Kokerne in der Kategorie **Ring** aus?
- (f) Was bedeutet es für eine Kategorie mit einem Objekt, Produkte zu besitzen? Können Sie ein nicht-triviales Beispiel finden?

2 | (Ko)Produkte von Funktoren

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} zwei Kategorien.

- (a) Zeigen Sie: \mathcal{D} hat binäre Produkte $\Rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Produkte.
- (b) Zeigen Sie: \mathcal{D} hat binäre Koprodukte $\Rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Koprodukte.

3 | Produkterhaltend oder nicht produkterhaltend

Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien mit Produkten.

- (a) Finden Sie einen Funktor F mit $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$ für alle Objekte A und B , der nicht produkterhaltend ist.
- (b) Formulieren Sie genau, was der Unterschied ist.

4 | Binäre Produkte + terminale Objekt \Rightarrow alle endlichen Produkte

Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit binären Produkten und einem terminalen Objekt.

- (a) Zeigen Sie, dass \mathcal{C} alle endlichen Produkte hat.
- (b) Formulieren Sie die duale Aussage.

(Hinweis: Es gibt mehrere Wege endliche Produkte aus binären zu bauen. Warum sind die äquivalent?)

5 | In Mod_R : Kern = Mono = monisch

Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in Mod_R .

- (a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
 - (i) f ist ein Kern, d.h. es gibt einen Morphismus $g: B \rightarrow C$ mit $f = \ker(g)$.
 - (ii) f ist ein Monomorphismus, d.h. für $h_1, h_2: T \rightarrow A$ mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$ folgt $h_1 = h_2$.
 - (iii) f ist monisch, d.h. für $h: T \rightarrow A$ mit $f \circ h = 0$ folgt $h = 0$.
 - (b) Formulieren Sie die duale Aussage.
-