Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
24.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 7

1 | Stegreiffragen: Limes und Kolimes

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie sehen die Indexkategorien für Produkte und Kopordukte aus?
(b) Was ist der Limes des Diagramms $* \to S^1 \leftarrow \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R} \to S^1$ die universelle Überlagerung ist?
(c) Was ist der Kolimes des Diagramms $\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ in $\mathbf{Grp}$?
(d) Wie kann der Kern einer Abbildung in $\mathbf{Mod}_R$ als Limes aufgefasst werden?
(e) Was ist der Limes in $\mathbf{Set}$ eines $\mathbb{N}$ indiziereten Diagramms, wobei alle $X_i \leftarrow X_{i+1}$ injektiv sind?
(f) Was ist der Kolimes in $\mathbf{Set}$ eines $\mathbb{N}$ indiziereten Diagramms, wobei alle $X_i \to X_{i+1}$ injektiv sind?
(g) Gegeben sein $f_{i,j} \colon A_i \to B_j$ für $(i,j) \in I \times J$. Welches von beiden ist die kanonische Abbildung, $\prod_{i\in I} A_i \to \coprod_{j\in J} B_j$ oder $\coprod_{i\in I} A_i \to \prod_{j\in J} B_j$, und wie ist sie definiert?

2 | Faserprodukte entlang Monos (und Epis)

Sei das folgende Diagramm ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A. \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie: $f \colon B \to A$ ist ein Monomorphismus $\Rightarrow$ $f' \colon P \to C$ ein Monomorphismus ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für: $f \colon B \to A$ Epimorphismus $\Rightarrow$ $f' \colon P \to C$ Epimorphismus.
(Hinweis: Probieren Sie eine Kategorie in der sich Epimorphismen anders als in $\mathbf{Set}$ verhalten)
(c) Zeigen Sie: $f \colon B \to A$ Isomorphismus $\Rightarrow$ $f' \colon P \to C$ Isomorphismus.

3 | Faserprodukte komponieren

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma"'] & B' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

und sei B' das Faserprodukt von $f \colon B \to A$ und $\alpha \colon A' \to A$.

(a) Zeigen Sie, dass C' genau dann das Faserprodukt von $g \colon C \to B$ und $\beta \colon B' \to B$ ist, wenn es das Faserprodukt von $f \circ g \colon C \to A$ und $\alpha \colon A' \to A$ ist.

4 | $\mathbf{Mod}_R$ ist (ko)vollständig

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt (ko)vollständig, wenn alle kleinen Diagramme einen (Ko)Limes in $\mathcal{C}$ haben, d.h. für jede kleine Indexkategorie $\mathcal{I}$, besitzt jeder Funktor $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ einen (Ko)Limes.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Mod}_R$ kovollständig ist.
(b) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbf{Mod}_R$ is vollständig.