Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
28.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 12

1 | Stegreiffragen: Abelsche Kategorien

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welche der folgenden Kategorien sind abelsch: $\mathbf{Mod}_R$, $\mathbf{Mod}_R^{op}$, $[n]$ für $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, **Set**, **Grp**, **Ab**, **Ring**, **Field**, **Top**, $\mathbf{Top}_*$, endlich erzeugte abelsche Gruppen, endliche abelsche Gruppen, torsionsfreie abelsche Gruppen?
(b) Wahr oder faslch: Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}^{op}$ abelsch.
(c) Wahr oder falsch: Die Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, ist abelsch.
(d) Wie kann die additive Struktur auf den Hom-Mengen aus den anderen Axiomen für additive Kategorien konstruiert werden?

2 | Mono-Epi Faktorisierung in abelschen Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie mit den nötigen (Ko-)Kernen und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass f faktorisiert als $X \xrightarrow{e} \mathrm{coim}(f) \xrightarrow{f'} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{m} Y$.
(b) Zeigen Sie, dass $e\colon X \to \mathrm{coim}(f)$ ein Epimorphismus ist.
(c) Zeigen Sie, dass $m\colon \mathrm{im}(f) \to Y$ ein Monomorphismus ist.
(d) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Zeigen Sie, dass $f'\colon \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ ein Isomorphismus ist.

3 | Links-/Rechtsexaktheit

Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (für Linksexaktheit von F):
  (i) Für $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt, ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{F(f)} Y \xrightarrow{F(g)} Z$ exakt.
  (Hinweis: Die linke Sequenz ist genau dann exakt, wenn f ein Kern von g ist. (Warum?))
  (ii) Für $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ exakt, ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{F(f)} Y \xrightarrow{F(g)} Z$ exakt.
  (iii) F erhält Kerne.
(b) Formulieren Sie die analogen Aussagen für Rechtsexaktheit.
(c) Folgern Sie, dass Exaktheit äquivalent zu Links- und Rechtsexaktheit ist.

4 | Homotopiekategorie

Betrachte die Kategorie von Kettenkomplexen $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$. Wir haben gesehen, dass die Homologiefunktoren H_n kettenhomotopieinvariant sind. Ziel ist es zu zeigen, dass diese Funktoren durch eine geeignetet Kategorie $\mathcal{K}$ faktorisieren.

(a) Zeigen Sie, dass Kettenhomotopie $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(C, D)$ definiert.
(b) Seien $u\colon B \to C$, $f, g\colon C \to D$, $v\colon D \to E$ Morphismen. Zeigen Sie, dass $f \sim g \Rightarrow vfu \sim vgu$.
(Folgern Sie, dass es eine Kategorie $\mathcal{K}$ gibt, deren Objekte Kettenkomplexe sind und die Morphismen Homotopieklassen von Morphismen.)
(c) Seien $f_0, f_1, g_0, g_1\colon C \to D$ Morphismen. Zeigen Sie $f_0 \sim g_0, f_1 \sim g_1 \;\Rightarrow\; f_0 + f_1 \sim g_0 + g_1$.
(Folgern Sie, dass $\mathcal{K}$ eine additive Kategorie ist und $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}$ ein additiver Funktor ist.)
(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ im Allgemeinen keine abelsche Kategorie ist.