Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
19.04.2024

Homologische Algebra
Blatt 2

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufagben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Epis/Monos, initial/terminal und Moduln

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Erhalten Funktoren Epimorhismen (bzw. Monomorphismen)?
(b) Erhalten Funktoren spaltende Epimorphismen (bzw. spaltende Monomorphismen)?
(c) Angenommen eine Kategorie hat initiale und terminale Objekte, stimmen diese immer überein?
(d) Wahr oder falsch: Jeder Morphismus vom initialen Objekt ist ein Monomorphismus.
(e) Wahr oder falsch: Jeder Morphismus vom terminalen Objekt ist ein Monomorphismus.
(f) Hat die Kategorie **Ring** (Ringe mit 1 und unitalen Ringhomomorphismen) ein Nullobjekt?
(g) Hat die Kategorie **Field** (Körper mit unitalen Ringhomomorphismen) initiale/terminale Objekte?
(h) Was beschreiben die Kategorie $*/\mathbf{Top}$, bzw. $\mathbf{Top}/*$, wobei $*$ der einelementige Raum ist?
(i) Was beschreibt die Kategorie $F/\mathbf{Field}$, bzw. $\mathbf{Field}/F$?
(j) Hat die Kategorie $c/\mathcal{C}$ ein initiales oder terminales Objekt? Wenn ja, welches?
(k) Ist jeder Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathbf{Mod}_R$ Teil einer kurzen exakten Sequenz der Form $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$, für ein C? Wenn nicht, welche sind es?
(l) Ist jeder Morphismus $f\colon B \to C$ in $\mathbf{Mod}_R$ Teil einer kurzen exakten Sequenz der Form $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$, für ein A? Wenn nicht, welche sind es?

2 | Rund um Epis, Monos und Isos

Seien $f\colon x \to y$ und $g\colon y \to z$ Morphismen in $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann ein spaltender Epimorphismus ist, wenn die Postkomposition

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, y), \quad (h\colon c \to x) \mapsto (f \circ h\colon c \to y)$$

surjektiv für alle Objekte c aus $\mathcal{C}$ ist.
(b) Formulieren und beweisen Sie die duale Aussage für spaltende Monomorphismen.
(c) Zeigen Sie: Ist f ein Monomorphism und spaltender Epimorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
(d) Zeigen Sie: Ist f ein Epimorphismus und spaltender Monomorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
(e) Zeigen Sie: Sind f und g Monomorphismen (bzw. Epimorphismen), so auch $g \circ f\colon x \to z$.
(f) Zeigen Sie: Ist $g \circ f\colon x \to z$ mono (bzw. epi), so ist f mono (bzw. g epi).

3 | Epi, aber nicht surjektiv und mono, aber nicht injektiv

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Begriffe „injektiv“ und „surjektiv“ (sofern definiert) kategorientheoretisch nicht notwendigerweise die richtigen Begriffe liefern.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ein nicht-surjektiver Epimorphismus in der Kategorie **Ring** ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\pi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in der Kategorie der divisiblen Gruppen (Gruppen $(G, \cdot)$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in G$ und jedes $\mathbb{N}_{>0}$ ein $y \in G$ gibt mit $y^n = x$) ein nicht-injektiver Monomorphismus ist.
(Hinweis: Sei G divisibel und $f, g\colon G \to \mathbb{Q}$ zwei verschiedene Gruppenhomomorphismen mit $\pi \circ f = \pi \circ g$. Wie unterscheiden sich $f(x)$ und $g(x)$ in $\mathbb{Q}$ für ein $x \in G$?)

4 | Wie exakt ist eigentlich Hom?

Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ und M ein R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass der kontravariante Homfunktor $\mathrm{Hom}(-, M)$ linksexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, M).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(-, M)$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. f^* ist nicht surjektiv.

(c) Sei $R = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(-, G)$ genau dann exakt ist, wenn G divisibel ist. (Hinweis: Für „divisibel $\Rightarrow$ exakt“ nutze das Lemma von Zorn)

Für einen beliebigen Ring gilt „exakt $\Rightarrow$ divisibel“ (gleiches Argument), aber die Umkehrung im Allgemeinen nicht.

(d) Zeigen Sie, dass der kovariante Homfunktor $\mathrm{Hom}(M, -)$ linksexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M, C).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(M, -)$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. g_* ist nicht surjektiv.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(R^n, -)$ exakt ist.

(g) Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ exakt ist.

Der letzte Teil zeigt, dass es mehr Moduln als nur R^n in $\mathbf{Mod}_R$ geben kann, für die der kontravariante Homfunktor exakt ist.

5 | Das starke 4-Lemma ★

Betrachten Sie folgendes kommutative Diagramm in $\mathbf{Mod}_R$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Zusätzlich seien beide Zeilen exakt, α ein Epimorphismus und δ ein Monomorphismus.

(a) Zeigen Sie: $g(\ker(\beta)) = \ker(\gamma)$.

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{im}(\beta) = (g')^{-1}(\mathrm{im}(\gamma))$.

(c) Nutzen Sie das starke 4-Lemma um das (kurze) 5-Lemma aus der Vorlesung zu zeigen.