

Homologische Algebra Blatt 3

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufgaben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Etwas zu Moduln und Kategorienäquivalenz

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wahr oder falsch: Eine kurze exakte Sequenz in \mathbf{Mod}_R spaltet genau dann, wenn $\text{Hom}(M, -)$ für jedes R -Modul M exakt ist.
- (b) Wie viele abelsche Gruppen von Ordnung p für p prim, 64 und 360 gibt es?
- (c) Ist $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring?
- (d) Wahr oder falsch: Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

wobei α und γ Isomorphismen sind, dann ist $B \cong B'$.

- (e) Wahr oder falsch: Das Skeleton eines Gruppoids hat nur ein einziges Objekt.

2 | Lokalisierung ist exakt

Sei R ein kommutativer Ring und S eine unter Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von R (d.h. $1 \in S$ und $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$). Definiere die Lokalisierung $S^{-1}R$ durch

$$S^{-1}R = (R \times S) / \sim, \quad (x, s) \sim (y, t) \iff \exists u \in S : (xt - ys)u = 0.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Relation \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Definiere die Addition und Multiplikation durch:

$$(x, s) + (y, t) = (xt + ys, st), \quad (x, s) \cdot (y, t) = (xy, st).$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Operationen auf $S^{-1}R$ wohldefiniert sind.
- (c) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Ring ist.
- (d) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R = 0 \iff 0 \in S$.

Die obige Definition kann direkt wörtlich auf R -Moduln verallgemeinert werden. Sei M ein R -Modul. Das lokalisierte Modul $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}R$ -Modul.

- (e) Zeigen Sie, dass $S^{-1} : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_{S^{-1}R}$ ein exakter Funktor ist.

3 | Gruppenringe

Sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe. Elemente im Gruppenring $R[G]$ sind formale R -Linearkombinationen von Elementen aus G , d.h.

$$R[G] = \left\{ \sum_{g \in G} f(g) \cdot g \mid f : G \rightarrow R, f(g) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } g \in G \right\}.$$

Definiere die Addition und Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} f(g) \cdot g \right) + \left(\sum_{g \in G} h(g) \cdot g \right) &= \sum_{g \in G} (f(g) + h(g)) \cdot g \\ \left(\sum_{g \in G} f(g) \cdot g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} h(g) \cdot g \right) &= \sum_{g, g' \in G} (f(g)h(g')) \cdot gg' \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $R[G]$ eine R -Algebra ist.
- (b) Sei $R \neq 0$. Zeigen Sie, dass $R[G]$ genau dann kommutativ ist, wenn G abelsch ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $R[G]$ nicht-triviale Nullteiler hat, wenn G Elemente endlicher Ordnung hat.

Kaplanskys Vermutung ist „ G torsionsfrei $\Rightarrow R[G]$ hat keine nicht-trivialen Nullteiler“. Auch wenn sie für viele Klassen von Gruppen bekannt ist, ist sie im Allgemeinen offen.

4 | Invariante Basis Eigenschaft

Ein Ring hat die „invariante Basis Eigenschaft“, wenn $R^m \cong_{\text{Mod}_R} R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass ein kommutativer Ring die invariante Basis Eigenschaft hat.
(Hinweis: Krulls Theorem besagt, dass jeder Ring ein maximales Ideal besitzt.)

Die Aussage gilt für jeden Ring, der einen Ringhomomorphismus zu einem Divisionsring hat.

- (b) Finden Sie einen nicht-trivialen Ring, der nicht die invariante Basis Eigenschaft besitzt.
(Hinweis: Starten Sie mit einem freien R -Modul von unendlichem Rang für beliebiges R .)

Die folgenden Aussagen sind nicht-äquivalente Abwandlungen der obigen Eigenschaft.

- (i) $R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (invariante Basis Eigenschaft),
- (ii) $R^m \cong R^n \oplus K \Rightarrow m \geq n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $R^n \cong R^n \oplus K \Rightarrow K = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $R \neq 0$.

- (c) Zeigen Sie (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i).

Es gibt Gegenbeispiele für die jeweiligen umgekehrten Richtungen.
