

## Homologische Algebra

### Blatt 4

---

#### 1 | Stehgreiffragen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein treuer Funktor. Wahr oder falsch:  $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$ .
- (b) Seien  $G, H$  Gruppen. Was sind die natürlichen Transformationen  $\eta: S \Rightarrow T$  für  $S, T: G \rightarrow H$ ?

#### 2 | Voll, treu und volltreu

Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor.

- (a) Zeigen Sie:  $F$  treu  $\Rightarrow F$  reflektiert Monomorphismen.
- (b) Zeigen Sie:  $F$  treu  $\Rightarrow F$  reflektiert Epimorphismen.
- (c) Zeigen Sie:  $F$  volltreu  $\Rightarrow F$  reflektiert Isomorphismen.
- (d) Zeigen Sie:  $F$  reflektiert Isomorphismen und voll  $\Rightarrow F$  ist wesentlich injektiv (injektiv auf Isomorphieklassen von Objekten).

Also ist jeder injektive/surjektive Morphismus ein Mono-/Epimorphismus und jeder volltreue Funktor ist wesentlich injektiv.

#### 3 | Spaltung in freie Gruppe und Torsionsanteil ist nicht natürlich

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Zerlegung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe in freien und Torsionsanteil nicht natürlich ist.

- (a) Beschreiben Sie alle natürlichen Transformationen  $\eta: \text{id}_{\mathbf{Ab}_{f.g.}} \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{Ab}_{f.g.}}$ .
  - (b) Nehmen Sie an, dass  $A \cong A/A_{\text{tors}} \oplus A_{\text{tors}}$  natürlich ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch.
-