Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
23.04.2025

Topologie II
Blatt 2

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Axiomatische Homologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Für eine Homologietheorie gilt $E_n(X \times Y) \cong E_n(X) \oplus E_n(Y)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(b) Wahr oder falsch: $\bigoplus_{i=1}^m E_n(X_i, A_i) \to E_n(\coprod_{i=1}^m X_i, \coprod_{i=1}^m A_i)$ ist ein Isomorphismus.

2 | Kleiner Künneth und Produkte mit Sphären

Ziel dieser Aufgabe ist es die Homologie des Torus $S^1 \times S^1$ für eine beliebige Homologietheorie E_n zu berechnen.

(a) Sei $x_0 \in S^n$. Zeigen Sie, dass $E_k(X \times S^n) \cong E_k(X) \oplus E_k(X \times S^n, X \times \{x_0\})$.
(b) Zeigen Sie, dass $E_k(X \times S^n, X \times \{x_0\}) \cong E_{k-n}(X)$.
(Hinweis: Es gibt eine relative Version der Mayer-Vietoris Sequenz.)
(c) Folgern Sie, dass $E_k(X \times S^n) \cong E_k(X) \oplus E_{k-n}(X)$.
(d) Berechnen Sie $E_k(S^1 \times S^1)$. Was ergibt sich für eine gewöhnliche Homologietheorie?
(e) Zeigen Sie allgemeiner, dass $E_k\left((S^1)^{\times n}\right) \cong \bigoplus_{i=0}^n E_{k-i}(*)^{\binom{n}{i}}$.

3 | Homologie mit trivialen Koeffizienten (gewöhnlich aber ungewöhnlich)

Ziel dieser Aufgabe ist es eine nicht-triviale Homologietheorie E'_n zu konstruieren, die für den Punkt verschwinden, d.h. $E'_n(*) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei dafür (E_n, ∂_n^E) eine gewöhnliche additive Homologietheorie mit $E_0(*) = G \neq 0$. Definiere $E'_n(X, A) := \prod_{k\in\mathbb{Z}} E_k(XA)/\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} E_k(XA)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit dem von ∂_n^E induziertem Differential.

(a) Zeigen Sie, dass E'_n eine Homologietheorie definiert.
(b) Zeigen Sie, dass E'_n das Dimensionsaxiom mit $E'_0(*) = 0$ erfüllt, d.h. gewöhnlich ist.
(c) Zeigen Sie, dass E'_n nicht-additiv und nicht-trivial ist.