Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
30.04.2025

Topologie II
Blatt 3

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Axiomatische Homologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Berechnen Sie mittels der Definition die zelluläre Homologie von $[0, 1]$.
(b) Wahr oder falsch: $H_n^{cell}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = H_n^{cell}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.
(c) Finden Sie einen Raum X mit $H_n^{cell}(X; R) \cong H_n^{cell}(\mathbb{CP}^2; R)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $X \not\simeq \mathbb{CP}^2$.

2 | Zelluläre Homologie von Sphären

Ziel dieser Aufgabe ist die zelluläre Homologie von S^n aus der Definition zu berechnen.

(a) Beschreiben Sie S^n als CW-Komplex mit genau zwei Zellen, bestimmen Sie den zellulären Komplex und berechnen Sie die Homologie $H_n^{cell}(S^n; R)$.
(b) Beschreiben Sie S^n als CW-Komplex mit genau zwei Zellen in jeder Dimension (von 0 bis n), bestimmen Sie den zellulären Komplex und berechnen Sie die Homologie $H_n^{cell}(S^n; R)$.

3 | Niedrigdimensionale Beispiele

Ziel dieser Aufgabe ist die zelluläre Homologie von kleinen CW-Komplexen zu bestimmen.

(a) Beschreiben die zelluläre Homologie von nulldimensionalen CW-Komplexen.
(b) Beschreiben die zelluläre Homologie von eindimensionalen CW-Komplexen.
(Kommt Ihnen das bekannt vor? Haben wir das bereits gesehen?)
(c) Berechnen Sie die zelluläre Homologie von $(S^1 \vee S^1) \cup_f D^2$ in Abhängigkeit von $f : D^2 \to S^1 \vee S^1$.
(d) Berechnen Sie die zelluläre Homologie von $S^1 \times S^1$, $\mathbb{RP}^2$ und der Kleinschen Flasche.
(Hinweis: Diese Frage ist, so wie sie hier gestellt ist, gemein (wieso?))
(e) Spezialisieren Sie die Berechnungen für $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$.

4 | Azyklische Räume

Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion eines nicht-zusammenziehbaren Raums mit zellulärer Homologie eines Punktes.

(a) Konstruieren Sie einen Raum X mit Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \langle a, b \mid a^2b^3 = (ba)^4ba^{-1} = 1\rangle$ und $H_n^{cell}(X; \mathbb{Z}) \cong H_n^{cell}(*; \mathbb{Z})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(Hinweis: Konstruieren Sie einen Raum mit der gegebenen Fundamentalgruppe und berechnen Sie dann die Homologie.)
(b) Zeigen Sie, dass der von Ihnen konstruierte Raum nicht zusammenziehbar ist.
(Hinweis: Die Gruppe S_5 könnte dabei hilfreich sein)
