Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
06.05.2025

Topologie II
Blatt 4

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Whitehead für Homologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welche Gruppe ist auf Blatt 3, Aufgabe 3 angegeben?
(b) Wie verändert sich das Theorem von Whitehead für Räume, die keine CW-Komplexe sind?
(c) Gilt die Aussage, falls nur angenommen wird, dass die Räume 0-zusammenhängend sind?
(d) Können Sie eine allgemeinere Bedingung (allgemeiner als $\pi_1(X) = 0$) finden, sodass das Theorem von Whitehead für 0-zusammenhängende Räume gilt?

2 | Homologie in genau einem Grad

Hurewicz besagt, dass für einen $(n-1)$-zusammenhängenden Raum X mit $n \geq 2$ die Abbildungen $\pi_i(X) \to H_i^{cell}(X;\mathbb{Z})$ Isomorphismen für alle $i \leq n$ sind.

(a) Bestimmen Sie alle $(n-1)$-zusammenhängenden n-dimensionale CW-Komplexe bis auf Homotopieäquivalenz.

3 | Hurewicz einen Grad weiter

Ziel dieser Aufgabe ist $h\colon \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}^{cell}(X;\mathbb{Z})$ besser zu verstehen (dies ist einen Grad höher als der Bereich in dem der Hurewicz Homomorphismus ein Isomorphismus ist.)

(a) Sei X $(n-1)$-zusammenhängenden für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $h\colon \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}^{cell}(X;\mathbb{Z})$ surjektiv ist.
(Hinweis: Betrachten Sie einen Raum, der aus X und weiteren $(n+1)$-Zellen besteht.)
(b) Zeigen Sie, dass diese Aussage im Fall $n = 1$ nicht gilt.
(c) Finden Sie ein $(n-1)$-zusammenhängenden Raum X für den $h\colon \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}^{cell}(X;\mathbb{Z})$ nicht trivial ist.

4 | Moore Räume (= Eilenberg-MacLane Räume für Homologie)

Sei G eine abelsche Gruppe und $n \geq 1$.

(a) Konstruieren Sie einen Raum $M(G,n)$ mit $H_n^{cell}(M(G,n);\mathbb{Z}) = G$ und $\tilde{H}_i^{cell}(X;\mathbb{Z}) = 0$.
(b) Beschreiben Sie $M(\mathbb{Z},n)$ und $M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},1)$.
(c) Zeigen Sie, dass

$$H_i^{cell}(K(G,n);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,i=0 \\ 0 & ,i=1,\dots,n-1 \\ G & ,i=n \\ 0 & ,i=n+1 \end{cases}$$

(d) Wenn möglich, konstruieren Sie einen Raum X mit $H_i^{cell}(X;\mathbb{Z}) = G_i$ für vorgegebene abelsche Gruppen G_i. Unter welchen Bedingungen, an die G_i, existiert so ein Raum?