Heinrich-Heine-Universität **Sommersemester 2025**
Marcus Zibrowius 21.05.2025
Jan Hennig

Topologie II
Blatt 6

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Künneth und universelles Koeffizienten Theorem

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Es gibt einen Raum X mit $H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ und $H_i(X;G) \neq 0$ für ein $G \in \mathbf{Ab}$.
(b) Seien $H_n(X;\mathbb{Z})$ und $H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt. Wie sieht $H_n(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ aus?
(c) Erklären Sie die Aussage: „Die naive Künneth Formel gilt für den freien Anteil der Homologie."

2 | Spalten, aber nicht natürlich

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Spaltungen in den kurzen exakten Sequenzen für das universelle Koeffizienten und Künneth Theorem nicht natürlich sind.

(a) Zeigen Sie, dass der Isomorphismus

$$H_n(X;M) \cong (H_n(X;R) \otimes M) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(X;R), M)$$

nicht natürlich in X ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k)$ und S^{k+1})
(b) Zeigen Sie, dass der Isomorphismus

$$H_n(X \times Y;R) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H_p(X;R) \otimes H_q(Y;R) \right) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X;R), H_q(Y;R))$$

nicht natürlich in X und Y ist.
(Hinweis: Betrachten Sie wieder $M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k)$ und S^{k+1})

3 | Torsion macht Künneth aufwendiger

Ziel dieser Aufgabe ist es anhand eines Beispiels zu zeigen, dass die naive Formulierung eines Künneth Theorems falsch ist (d.h. wir brauchen den Tor_1^R Term) und wie viel einfacher es die Rechnung macht.

(a) Berechnen Sie, ohne Verwendung des Künneth Theorems, $H_i(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n) \times M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, m);\mathbb{Z})$ für $n, m \geq 1$ und p, q prim.
(Verwenden Sie, dass Sie den Kettenkomplex für $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n) \times M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, m)$ verstehen).
(b) Berechnen Sie $H_i(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n);\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, m);\mathbb{Z})$.
(c) Berechnen Sie $\mathrm{Tor}_1^R(H_i(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n);\mathbb{Z}), H_j(M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, m);\mathbb{Z}))$.
(d) Identifizieren Sie die Summanden aus (a) mit denen aus (b) und (c).
(e) Berechnen Sie $H_i(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2;\mathbb{Z})$.
