Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
28.05.2025

Topologie II
Blatt 7

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Koeffizienten und Kohomologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch:
  (i) Ist $f_*\colon H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(Y;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus, so auch $f_*\colon H_*(X;G) \to H_*(Y;G)$.
  (ii) Ist $f_* = g_*\colon H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(Y;\mathbb{Z})$, so auch $f_* = g_*\colon H_*(X;G) \to H_*(Y;G)$.

(b) Berechnen Sie für den folgenden Kettenkomplex

$$C_* : \qquad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

  (i) Die Homologie $H_n(C_*)$.
  (ii) Den dualen Komplex $(C^\vee)^*$.
  (iii) Die Kohomologie $H^n((C^\vee)^*)$.

2 | Keine guten Alternativen für weitere Definitionen

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass gewisse Änderungen in der Definition einer Kohomologietheorie ungewollte Auswirkungen haben.

(a) Zeigen Sie, dass $F^n(X,A) := \mathrm{Hom}(H_n(X,A;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ für kein Familie von Randabbildungen $\delta^n\colon F^n(A) \to F^{n+1}(X,A)$ eine Kohomologietheorie definiert.

(b) Sei $G \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$. Berechnen Sie die Homologiegruppen von

$$\dots \to \mathrm{Hom}(G, C_{n+1}(X)) \to \mathrm{Hom}(G, C_n(X)) \to \mathrm{Hom}(G, C_{n-1}(X)) \to \dots .$$

Definieren diese Homologietheorien?

3 | Bockstein

Sei $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass es lange exakte Sequenzen der folgenden Form gibt

$$\dots \to H_n(X;A) \xrightarrow{i_n} H_n(X;B) \xrightarrow{p_n} H_n(X;C) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(X;A) \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(X;B) \xrightarrow{p_{n-1}} H_{n-1}(X;C) \to \dots$$

$$\dots \to H^n(X;A) \xrightarrow{i^n} H^n(X;B) \xrightarrow{p^n} H^n(X;B) \xrightarrow{\beta^n} H^{n+1}(X;A) \xrightarrow{i^{n+1}} H^{n+1}(X;B) \xrightarrow{p^{n+1}} H^{n+1}(X;C) \to \dots$$

und beschreiben Sie die Bocksteinhomomorphismen $\beta_n\colon H_n(X;C) \to H_{n-1}(X;A)$.

(b) Zeigen Sie $\beta_n \circ \beta_{n+1} = 0$ für die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$.
(Hinweis: betrachten Sie die Bocksteinsequenz für $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$.)

(c) Berechnen Sie die homologische Bocksteinsequenz für $X = M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, m)$ und die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$.

(d) Berechnen Sie die homologische Bocksteinsequenz für $X = \mathbb{RP}^n$ und die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.
