Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
04.06.2025

Topologie II
Blatt 8

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Kohomologieringe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie sieht der Kohomologiering $H^*(S^n; R)$ aus?

2 | Explizite Beschreibung des Cup-Produkts für singuläre Kohomologie

Für $\varphi \in C^k(X; R)$, $\psi \in C^l(X; R)$ definiere $\varphi \cup \psi \in C^{k+l}(X; R)$ durch

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_k,\ldots,v_{k+l+1}]}) \qquad \text{für } \sigma\colon \Delta^{k+l} \to X.$$

(a) Machen Sie die Definition explizit für $k + l = 2$.
(b) Zeigen Sie $\partial(\varphi \cup \psi) = (\partial\varphi) \cup \psi + (-1)^k \varphi \cup (\partial\psi)$ für $\varphi \in C^k(X; R)$, $\psi \in C^l(X; R)$.
(Notation: ∂ war das Differential auf dem Kokettenkomplex $C^*(X; R)$.)
(c) Zeigen Sie, dass $-\cup-\colon C^k(X; R) \times C^l(X; R) \to C^{k+l}(X; R)$ eine Abbildung auf der Kohomologie induziert.

3 | Explizite Cup-Produktrechnung für den Torus

Ziel dieser Aufgabe ist es den Kohomologiering des Torus aus der Definition zu berechnen.

(a) Statten Sie den Tours $T = S^1 \times S^1$ mit einer Δ-Komplex Struktur aus und berechnen Sie daraus die Kohomologiegruppen $H^i(T; R)$.
(b) Wählen Sie singuläre Koketten, die die Kohomologiegruppen $H^i(T; R)$ erzeugen und berechnen Sie alle Cup-Produkte.

4 | Keine interessanten Cup-Produkte hier zu sehen

Sei $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit A_i zusammenziehbar.

(a) Zeigen Sie, dass $H^{k_1}(X; R) \otimes_R \cdots \otimes_R H^{k_n}(X : R) \xrightarrow{\cup} H^{k_1+\cdots+k_n}(X; R)$ verschwindet wenn $k_i > 0$ für alle i.
(b) Beschreiben Sie den Kohomologiering $H^*(\Sigma X; R)$ für beliebiges X.
