Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
11.06.2025

Topologie II
Blatt 9

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Kohomologieringe von projektiven Räumen

Betrachte $\mathbb{RP}^n$ mit Unterräumen $p = \{[0 : \ldots : 0 : 1 : 0]\}$, $\mathbb{RP}^{n-1} = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_n = 0\}$ und $\mathbb{RP}^1 = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_0 = \cdots = x_{n-2} = 0\}$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind für $i \in \{0, 1, n-1\}$

$$\begin{tikzcd}
H^{n-i}(\mathbb{RP}^n) \arrow[d, "\cong"'] & H^{n-i}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^i) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \arrow[d, "\cong"] \\
H^{n-i}(\mathbb{RP}^{n-i}) & H^{n-i}(\mathbb{RP}^{n-i}, \mathbb{RP}^{n-i} \setminus \{p\}) \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, "\cong"'] & H^{n-i}(\mathbb{R}^{n-i}, \mathbb{R}^{n-i} \setminus \{0\})
\end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{RP}^n$ durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 : \ldots : x_{n-1} : 1 : x_n]$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathbb{RP}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{RP}^n) \\
H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^1) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{p\}) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})
\end{tikzcd}$$

(c) Folgern Sie, dass $H^1(\mathbb{RP}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) \to H^n(\mathbb{RP}^n)$ ein Isomorphismus ist.
(d) Folgern Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ mit $|x| = 1$.
(e) Folgern Sie analog, dass $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ mit $|x| = 2$ gilt.

2 | Cup-Produkte liefern feinere Informationen

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Cup-Produkt Räume voneinander unterscheiden kann.

(a) Zeigen Sie, dass $H_*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$.
(b) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$ als graduierte Gruppen.
(c) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \ncong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$ als graduierte Ringe.
(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{CP}^2$ und $S^2 \vee S^4$ nicht homotopieäquivalent sind.
(Extra: Hätten wir diese Frage schon früher beantworten können?)