Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2025
18.06.2025

Topologie II
Blatt 10

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Kohomologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.
(b) Wahr oder falsch: $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ für X wegzusammenhängend.
(c) Was genau sind die Voraussetzungen für das Künneth-Theorem für Kohomologie?
(d)* Gibt es einen Raum X mit $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$?
(Dies ist eine Rechercheaufgabe.)

2 | Integraler Kohomologiering vom reellen projektiven Raum

In Blatt 9 Aufgabe 1 c) haben wir gezeigt, dass $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ mit $|x| = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^{2k};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(2x, x^{k+1})$ mit $|x| = 2$.
(b) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x,y]/(2x, x^{k+1}, y^2, xy)$ mit $|x| = 2$ und $|y| = 2k+1$.
(c) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{RP}^{2k} \vee S^{2k+1};\mathbb{Z})$ als (graduierte) Ringe.
(d) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ncong H^*(\mathbb{RP}^{2k} \vee S^{2k+1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ als (graduierte) Ringe.

3 | Reelle und komplexe Divisionsalgebren

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es endlich-dimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ nur in Dimensionen der Form 2^k für ein $k \in \mathbb{N}$ geben kann. Analog wollen wir zeigen, dass endlich-dimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{C}$ Dimension 1 haben müssen.

(a) Beschreiben Sie die von der Multiplikationsabbildung induzierte Abbildung auf der Kohomologie $H^*(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
(b) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = 0$ für alle $0 < k < n$ genau dann gilt, wenn $n = 2^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$.
(Zeigen Sie z.B. $(1+x)^n = 1 + x^n$ ist äquivalent zu $n = 2^j$.)
(c) Folgern Sie, dass wenn $\mathbb{R}^n$ eine Divisionsalgebra ist, dass $n = 2^j$ ist.
(d) Folgern Sie, dass wenn $\mathbb{C}^n$ eine Divisionsalgebra ist, dass $n = 1$ ist.
(e) Geben Sie jeweils eine unendlich-dimensionale Divisionsalgebra an.

(Tatsächlich gibt es nur drei endlich-dimensionale reelle Divisionsalgebren: $\mathbb{R}$ (Dimension 1), $\mathbb{C}$ (Dimension 2) und Quaternionen $\mathbb{H}$ (Dimension 4).)