Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
15.10.2024

Topologie I
Blatt 1

---

1 | Stegreiffragen: Topologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Sei X eine Menge und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Für welche $i, j \in \{1, 2\}$ gelten die folgenden Aussagen:
  (i) Ist X kompakt bzgl. $\mathcal{T}_i$, so auch bzgl. $\mathcal{T}_j$.
  (ii) Ist X Hausdorff bzgl. $\mathcal{T}_i$, so auch bzgl. $\mathcal{T}_j$.
  (iii) Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung bzgl. $\mathcal{T}_i$, so auch bzgl. $\mathcal{T}_j$.
  (iv) Ist $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung bzgl. $\mathcal{T}_i$, so auch bzgl. $\mathcal{T}_j$.

(b) Wahr oder falsch: Ist $f\colon X \to Y$ injektiv/surjektiv, so auch $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.
(c) Wahr oder falsch: Ist $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ injektiv/surjektiv, so auch $f\colon X \to Y$.
(d) Wahr oder falsch: Ist $\pi_1(X, x_0) = 0$ für X wegzusammenhängend, so ist X kontrahierbar.
(e) Wie sehen wie sehen Produkte/Koprodukte in **Top** aus?

2 | Rechtecklemma

Seien X und Y topologische Räume, seien $K \subseteq X$ und $L \subseteq Y$ kompakte Teilräume, und sei $O \subseteq X \times Y$ eine offene Teilmenge des Produkts, mit $K \times L \subseteq O$.

Zeigen Sie, dass offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ existieren, mit:

$$K \times L \subseteq U \times V \subseteq O.$$

Slogan: „Jede offene Umgebung eines kompakten Rechtecks enthält ein offenes Rechteck.“

3 | Lokal kompakt

Ein topologischer Raum X heißt lokal kompakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ eine kompakte Umgebung K existiert mit $x \in K \subseteq U$.

(a) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume von lokal kompakten Räumen lokal kompakt sind.
(b) Zeigen Sie, dass offene Unterräume von lokal kompakten Räumen lokal kompakt sind.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt ist.
(d) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \{(0, 0)\}$ nicht lokal kompakt ist.
(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht lokal kompakt ist.
(f) Finden Sie einen kompakten Raum mit einem offenen nicht-lokal kompaktem Unterraum. (Hinweis: modifizieren Sie (e). Dieser Raum ist kompakt aber nicht lokal kompakt.)
(g) Finden Sie lokal kompakte Räume A_n für $n \in \mathbb{N}$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nicht lokal kompakt ist.

4 | The (trivial) legend of Zelda

Welche Fundamentalgruppe hat das Komplement von n disjunkten unverschlungenen und unverknoteten Kreisen in $\mathbb{R}^3$?

Konkreter: Sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Komplements von $(S^1 \times \{1\}) \cup \cdots \cup (S^1 \times \{n\})$ in $\mathbb{R}^3$.

5 | Es gibt kein Exponentialgesetz in Top

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es kein allgemeines Exponnetialgesetz in **Top** geben kann.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{coeq}(i \times \mathbb{Q}, j \times \mathbb{Q}) \to \mathrm{coeq}(i, j) \times \mathbb{Q}$ kein Homöomorphismus ist.
(Hinweis: Nehmen Sie die Inklusion $i \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $j \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto n + 1$)

(b) Zeigen Sie, dass es kein Exponentialgesetz in **Top** gibt.

In anderen Worten: **Top** ist nicht kartesisch abgeschlossen.

6 | KO war die einzige Möglichkeit ★

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es maximal eine Topologie auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ gibt, sodass ein Exponentialgesetz gilt.

(i) Eine Topologie auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ heißt „grob genug“, wenn für $f \colon Z \times X \to Y$ stetig auch $f^\sharp \colon Z \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ stetig ist.

(ii) Eine Topologie auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ heißt „fein genug“, wenn für $f^\sharp \colon Z \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ auch $f \colon Z \times X \to Y$ stetig ist.

Eine Topologie, die ein Exponentialgesetz erfüllt muss „grob genug“ und „fein genug“ sein.

(a) Zeigen Sie, dass eine eine Topologie auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ genau dann „fein genug“ ist, wenn die Auswertungsabbildung $ev \colon X \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \to Y$ stetig ist.

(b) Sei $\mathcal{T}_{\text{grob}}$ eine Topologie, die „grob genug“ ist und $\mathcal{T}_{\text{fein}}$ eine Topologie, die „fein genug“ ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{\text{grob}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{fein}}$.

(c) Zeigen Sie, dass es höchstens eine Topologie gibt, die „grob genug“ und „fein genug“ ist.
(Bemerkung: Es gibt eine konkrete Beschreibung aller Räume die eine solche Topologie erlauben)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine solche Topologie für lokal-kompakte Räume durch die kompakt-offen Topologie gegeben ist. Nach Teil c) gibt es auch nur diese.