Korrektur zu Blatt 1

Beim Erstellen des Übungsblatts und in der Übung selbst habe ich verschiedene Definitionen von „lokal kompakt“ gemischt. Dadurch ist die Verwirrung in der Übung entstanden. Tut mir leid. Hier ist die korrigierte Version mit Erklärung.

3 | Lokal kompakt

Ein topologischer Raum X heißt lokal kompakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ eine kompakte Umgebung K existiert mit $x \in K \subseteq U$.

(a) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume von lokal kompakten Räumen lokal kompakt sind.
(b) Zeigen Sie, dass offene Unterräume von lokal kompakten ~~**Hausdorff**~~ Räumen lokal kompakt sind.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt ist.
(d) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \{(0,0)\}$ nicht lokal kompakt ist.
(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht lokal kompakt ist.
(f) Finden Sie einen kompakten Raum mit einem offenen nicht-lokal kompaktem Unterraum. (Hinweis: modifizieren Sie (e). **Dieser Raum ist kompakt aber nicht lokal kompakt.**)
(g) Finden Sie lokal kompakte Räume A_n für $n \in \mathbb{N}$, sodass $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nicht lokal kompakt ist.

Was hat sich verändert: der Kommentar für (f) wurde erweitert (siehe unten Ergänzung (c)-(e)) und in Teil (b) wird die Hausdorffvoraussetzung nicht benötig.

> Angenommen $V \subseteq X$ ist offen. Wir wollen zeigen, dass V lokal kompakt ist. Für jeden Punkt $x \in V$ und jede offene Menge $x \in U_V \subseteq V$ brauchen wir eine kompakte Umgebung $x \in K \subseteq U_V$. Da U_V bereits offen in X ist, folgt die Behauptung aus der lokalen Kompaktheit von X.

Was haben wir stattdessen in der Übung für (b) gemacht: Wir haben gezeigt, dass jeder schwach lokal kompakte Hausdorff Raum lokal kompakt ist.

Ein topologischer Raum X heißt schwach lokal kompakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung K existiert.

(Jeder lokal kompakte Raum ist schwach lokal kompakt, z.B. $U = X$, und jeder kompakte Raum ist schwach lokal kompakt, z.B. $K = X$ für alle Punkte.)

Kurze Zusammenfassung des Arguments: Wir haben eine kompakte Umgebung von $x \in X$ genommen und verkleinert, damit sie in einer vorgegebenen offen Menge liegt (die Hausdorffeigenschaft war nötig um die kompakte Umgebung weit genug vom Rand der offenen Menge zu entfernen).

Ergänzungen:

(a) $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \{(0,0)\}$ ist nicht (schwach) lokal kompakt, da $(0,0)$ keine kompakte Umgebung besitzt.
(b) $\mathbb{Q}$ ist nicht (schwach) lokal kompakt, da kein Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.
(c) Betrachte $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, wobei die offenen Mengen durch offene Mengen in $\mathbb{Q}$ oder die Menge $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben sind. Dieser Raum ist kompakt und dadurch schwach lokal kompakt, aber er ist nicht Hausdorff, nicht lokal kompakt, und besitzt eine offene nicht lokal kompakt Teilmenge (z.B. $\mathbb{Q}$).
(d) Explizit nochmal: $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ist kompakt, aber nicht lokal kompakt.
(e) Jeder kompakte Hausdorff Raum ist lokal kompakt (folgt entweder aus der alten Aufgabe (b) oder der Tatsache, dass jeder kompakte Hausdorff Raum regulär ist).

Dass das für Verwirrung gesorgt hat tut mir leid. Falls noch etwas unklar sein sollte können wir das gerne nochmal besprechen.