Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
22.10.2024

Topologie I
Blatt 2

---

1 | Stegreiffragen: Lokal kompakt erzeugt und schwach Hausdorff

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Ein Raum X ist genau dann lokal kompakt erzeugt, wenn $U \subseteq X$ offen $\Leftarrow s^{-1}(U) \subseteq K$ offen, für alle lokal kompakten K und stetigen $s\colon K \to X$.
(b) Ist die k-Topologie auf $k(X)$ feiner, gröber und nicht vergleichbar mit der Topologie auf X?
(c) Wahr oder falsch: Ein Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn die Diagonale $\Delta_X \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist.
(d) Was genau ist der Unterschied zwischen Hausdorff und schwach Hausdorff?

2 | Unendliche Produkte von lokal kompakten Räumen (nochmal, aber besser)

Auf Blatt 1 Aufgabe 3 (g) haben wir gesehen, dass unendliche Produkte von lokal kompakten Räumen nicht unbedingt lokal kompakt sind. Es gilt folgende genaue Charakterisierung:

Zeigen Sie, dass ein Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ nicht-leerer Räume X_i genau dann lokal kompakt ist, wenn alle X_i lokal kompakt und fast alle X_i kompakt sind.

(Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Tychonoff (beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt))

3 | Lokal kompakt erzeugt

Für lokal kompakte Räume war die analoge Aussage Aufgabe 3 auf Blatt 1.

(a) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume von lokal kompakt erzeugten Räumen lokal kompakt erzeugt sind.
(b) Zeigen Sie, dass offenen Unterräume von lokal kompakt erzeugten Räumen lokal kompakt erzeugt sind.

4 | Equalizer, Graphen, schwach Hausdorff, ... in $\mathbf{Top}_{\mathrm{lke}}$

Sei $\mathbf{Top}_{\mathrm{lke}}$ die Kategorie der lokal kompakt erzeugten Räume.

(a) Zeigen Sie, dass ein Raum X genau dann schwach Hausdorff ist, wenn der Equalizer

$$eq(f, g) = \{t \in T \mid f(t) = g(t)\} \subseteq T$$

abgeschlossen in T ist für alle $f, g\colon T \to X$ in $\mathbf{Top}_{\mathrm{lke}}$.
(b) Folgern Sie, dass der Graph einer Abbildung $f\colon X \to Y$ in $\mathbf{Top}_{\mathrm{lke}}$, mit Y schwach Hausdorff, abgeschlossen in $X \times_k Y$ ist.
