Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
29.10.2024

Topologie I
Blatt 3

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

1 | Stegreiffragen: ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakte und Kofaserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Ist $S^1 = \partial D^2 \hookrightarrow D^2$ ein ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakt?
(b) Wahr oder falsch: Jede abgeschlossene Einbettung $A \hookrightarrow X$ ist eine Kofaserung.

2 | Mit dem Abbildungszylinder von X nach Y

Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und M_f der zugehörige Abbildungszylinder.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $Y \hookrightarrow M_f$ ein Deformationsretrakt ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Inklusion $X \hookrightarrow M_f$ ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

3 | Produkte und Summen von Kofaserungen

Seien $f\colon A \hookrightarrow X$ und $g\colon B \hookrightarrow Y$ Kofaserungen.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt $f \times g\colon A \times B \to X \times Y$ eine Kofaserung ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Summe $f \amalg g\colon A \amalg B \to X \amalg Y$ eine Kofaserung ist.

4 | Diesen Teil können wir ignorieren

Sei A zusammenziehbar und $i\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.

(a) Zeigen Sie, dass die Projektion $X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist.
(b) Finden Sie Gegenbeispiele, die jeweils nur eine der beiden Annahmen erfüllen.

5 | Abbildungskegel

Der Kegel CX über einem Raum X ist der Quotientenraum $CX := (X \times I)/i_1(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass CX für alle X zusammenziehbar ist.
(b) Zeigen Sie, dass $i_0\colon X \hookrightarrow CX$ ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

Der Abbildungskegel Cf einer Abbildung $f\colon X \to Y$ ist definiert als folgender Pushout:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & CX \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Cf \end{tikzcd}$$

Sei $f\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.

(c) Zeigen Sie, dass Cf homotopieäquivalent zum Quotienten X/A ist.
