

Topologie I Blatt 4

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

1 | Stegreiffragen: Faserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wahr oder falsch: Die Abbildung $p: X \rightarrow *$ ist eine Faserung.
- (b) Wahr oder falsch: Die Abbildung $pr_1: (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \rightarrow I$ ist eine Faserung.
- (c) Wahr oder falsch: Ist $p: E \rightarrow B$ eine Faserung und $X \subseteq E$, dann ist $p|_X: X \rightarrow B$ eine Faserung.

2 | Bilder von Faserungen

Sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung mit $E \neq \emptyset$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\text{im}(p)$ eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von B ist.
Konkret: Ist $x \in \text{im}(p)$ und $\gamma: I \rightarrow B$ ein Weg von x nach $y \in B$, dann gilt $y \in \text{im}(p)$.
- (b) Folgern Sie, dass eine Faserung in einen wegzusammenhängenden Raum surjektiv ist.
- (c) Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-surjektive Faserung.

3 | Satz von Kieboom ★

Ziel dieser Aussage ist eine Verallgemeinerung von Blatt 3 Aufgabe 3(a) zu zeigen (Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen, siehe (l) und (m)).

Zur Vorbereitung:

- (a) Sei $i_a: A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung und $p: E \rightarrow B$ eine Faserung. Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_a(A)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
(Hinweis: Die Abbildung $u: B \rightarrow I$ in der Definition eines UDRs kann „besser“ gewählt werden.)
- (b) Seien $j: B \rightarrow A$ und $i: A \rightarrow X$ Abbildungen, wobei i und $i \circ j$ Kofaserungen sind. Zeigen Sie, dass j eine Kofaserung ist.
- (c) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i: A \rightarrow X$ ein (starker) Deformationsretrakt und $p: E \rightarrow B$ eine Faserung ist. Zusätzlich gebe es ein $u: X \rightarrow I$ mit $u^{-1}(\{0\}) = A$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Zeigen Sie, dass ein Lift $H: X \rightarrow E$ existiert.

- (d) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und p_A, p_X Faserungen sind:

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{i} & X \\ p_A \searrow & & \swarrow p_X \\ & B & \end{array}$$

Folgern Sie, dass $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung über B ist, d.h. eine Retraktion $r: X \times I \rightarrow M_i$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} & M_i \\
 \downarrow & \nearrow r & \downarrow \\
 X \times I & \xrightarrow{p_X \circ \text{pr}_1} & B
 \end{array}$$

Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 X_0 & \xrightarrow{f_0} & B_0 & \xleftarrow{p_0} & E_0 \\
 i_{X_0} \downarrow & & i_{B_0} \downarrow & & \downarrow i_{E_0} \\
 X & \xrightarrow{f} & B & \xleftarrow{p} & E
 \end{array}$$

wobei $i_{X_0}, i_{B_0}, i_{E_0}$ Kofaserungen, und p_0, p Faserungen sind.

- (e) Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
- (f) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
- (g) Zeigen Sie, dass $p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}: p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \rightarrow B_0$ eine Faserung ist.
- (h) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung über B_0 ist.
- (i) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
- (j) Zeigen Sie, dass $\bar{p}: X \times_B E \rightarrow X$ eine Faserung ist.
- (k) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.

Endlich folgt das Finale:

- (l) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.
- (m) Folgern Sie, dass das Produkt zweier Kofaserungen eine Kofaserung ist (Blatt 3, Aufgabe 3(a)).