

Lösung zu Blatt 4, Aufgabe 3: „Satz von Kieboom“

3 | Satz von Kieboom ★

Ziel dieser Aussage ist eine Verallgemeinerung von Blatt 3 Aufgabe 3(a) zu zeigen (Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen, siehe (l) und (m)).

Zur Vorbereitung:

- (a) Sei $i_a: A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung und $p: E \rightarrow B$ eine Faserung. Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_a(A)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.

(Hinweis: Die Abbildung $u: B \rightarrow I$ in der Definition eines UDRs kann „besser“ gewählt werden.)

Lösung: Weil $i_a: A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung ist, gibt es eine Homotopie $H: B \times I \rightarrow B$ und ein $u: B \rightarrow I$ mit

$$\begin{aligned} H(-, 0) &= \text{id}_B, \\ H(x, t) &\in i_a(A) \quad \forall t > u(x), \\ H(a, -) &= a \quad \forall a \in i_a(A), \\ i_a(A) &= u^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

Die Existenz der hier verwendeten Funktion $u: B \rightarrow I$ folgt aus dem Beweis der Vorlesung. Da $p: E \rightarrow B$ eine Faserung ist, gibt es eine Abbildung $\bar{H}: E \times I \rightarrow E$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{id}_E} & E \\ \downarrow i_0 & \searrow \bar{H} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow[p \times \text{id}_I]{} & B \times I \xrightarrow{H} B \end{array}$$

Definiere jetzt die folgenden Abbildungen, die zeigen, dass $p^{-1}(i_a(A)) \hookrightarrow E$ ein Umgebungsdeformationsretrakt, also eine Kofaserung, ist.

$$\begin{aligned} \tilde{H}: E \times I &\rightarrow E, & (e, t) &\mapsto \bar{H}(e, \min\{t, u(p(e))\}), \\ \tilde{u}: E &\rightarrow I, & e &\mapsto u(p(e)). \end{aligned}$$

Wir überprüfen die Umgebungsdeformationsretraktionsbedingungen:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(e, 0) &= \bar{H}(e, 0) = e, \\ \tilde{H}(e, 1) &= \bar{H}(e, u(p(e))) \in p^{-1}(i_a(A)) && \forall e \in p^{-1}(u^{-1}([0, 1])), \\ \tilde{H}(e, t) &= \bar{H}(e, \underbrace{\min\{t, u(p(e))\}}_{=0}) = \bar{H}(e, 0) = e && \forall e \in p^{-1}(i_a(A)) \forall t, \\ \tilde{u}^{-1}(\{0\}) &= \{e \in E \mid \tilde{u}(e) = u(p(e)) = 0\} = p^{-1}(i_a(A)), \\ \tilde{u}^{-1}([0, 1]) &= p^{-1}(u^{-1}([0, 1])), \end{aligned}$$

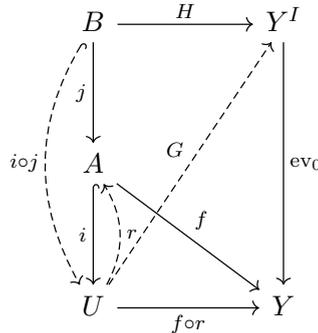
wobei die zweite Aussage gilt, weil $i_a(A)$ abgeschlossen ist.

- (b) Seien $j: B \rightarrow A$ und $i: A \rightarrow X$ Abbildungen, wobei i und $i \circ j$ Kofaserungen sind. Zeigen Sie, dass j eine Kofaserung ist.

Lösung: Wir zeigen die Homotopieerweiterungseigenschaft für j . Betrachte dafür folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{H} & Y^I \\ j \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Weil $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung ist, gibt es eine offene Umgebung $i(A) \subseteq U \subseteq X$ und eine Retraktion $r: U \rightarrow A$, also $r \circ i = \text{id}_A$ und $i \circ r \simeq \text{id}_U$. Betrachte nun folgendes Diagramm,

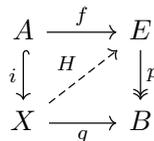


wobei der Lift $G: U \rightarrow Y^I$ existiert, da $i \circ j$ eine Kofaserung ist. Ein Lift im ursprünglichen Diagramm ist durch $G \circ i: A \rightarrow Y^I$ gegeben, da

$$(G \circ i) \circ j = H,$$

$$\text{ev}_0 \circ (G \circ i) = (\text{ev}_0 \circ G) \circ i = f \circ r \circ i = f.$$

- (c) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i: A \rightarrow X$ ein (starker) Deformationsretrakt und $p: E \rightarrow B$ eine Faserung ist. Zusätzlich gebe es ein $u: X \rightarrow I$ mit $u^{-1}(\{0\}) = A$.

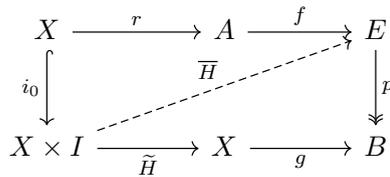


Zeigen Sie, dass ein Lift $H: X \rightarrow E$ existiert.

Lösung: Da $i: A \rightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt ist, gibt es ein $r: X \rightarrow A$ mit $r \circ i = \text{id}_A$ und $i \circ r = H(-, 0) \simeq_A H(-, 1) = \text{id}_X$ für eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow X$. Definiere die Abbildung:

$$\tilde{H}: X \times I \rightarrow X, \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, t/u(x)), & t < u(x) \\ H(x, 1), & t \geq u(x) \end{cases}$$

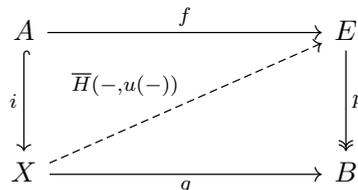
Betrachte nun das folgende Diagramm:



Das Diagramm kommutiert, weil

$$(g \circ \tilde{H} \circ i_0)(x) = g(\tilde{H}(x, 0)) = \begin{cases} g(H(x, 0)), & x \notin i(A) \\ g(H(x, 1)), & x \in i(A) \end{cases} = (g \circ i \circ r)(x) = (p \circ f \circ r)(x).$$

Die Abbildung $\bar{H}: X \times I \rightarrow E$ existiert, weil $p: E \rightarrow B$ eine Faserung ist. Der gewünschte Lift ist gegeben durch,



weil

$$\begin{aligned}\overline{H}(i(a), u(i(a))) &= \overline{H}(i(a), 0) = f(r(i(a))) = f(a), \\ p(\overline{H}(x, u(x))) &= g(\tilde{H}(x, u(x))) = g(H(x, 1)) = g(x).\end{aligned}$$

- (d) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und p_A, p_X Faserungen sind:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow p_A & \swarrow p_X \\ & & B \end{array}$$

Folgern Sie, dass $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung über B ist, d.h. eine Retraktion $r: X \times I \rightarrow M_i$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} & M_i \\ & \searrow r & \swarrow \\ X \times I & \xrightarrow{p_X \circ p_{r_1}} & B \end{array}$$

Lösung: Faktorisiere $i: A \rightarrow X$ durch den Abbildungszylinder als $A \xrightarrow{j} M_i \xrightarrow{q} X$, wobei j eine Kofaserung ist, und q eine Homotopieäquivalenz und Faserung. Das folgende Diagramm erfüllt die Bedingung für (c) (j ist ein (starker) Deformationsretrakt, weil i eine Kofaserung ist, und $p_X \circ q$ eine Faserung als Verknüpfung von Faserungen):

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\text{id}_{M_i}} & M_i \\ j \downarrow & \searrow r & \swarrow p_X \circ q \\ X \times I & \xrightarrow{p_X \circ p_{r_1}} & B \end{array}$$

Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & B_0 & \xleftarrow{p_0} & E_0 \\ i_{X_0} \downarrow & & i_{B_0} \downarrow & & \downarrow i_{E_0} \\ X & \xrightarrow{f} & B & \xleftarrow{p} & E \end{array}$$

wobei $i_{X_0}, i_{B_0}, i_{E_0}$ Kofaserungen, und p_0, p Faserungen sind.

- (e) Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
Lösung: Folgt aus (a) für die Kofaserung $i_{B_0}: B_0 \rightarrow B$ und die Faserung $p: E \rightarrow B$.
(f) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
Lösung: Folgt aus (b) für $E_0 \rightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ (Voraussetzungen: Annahme und (e))
(g) Zeigen Sie, dass $p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}: p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \rightarrow B_0$ eine Faserung ist.
Lösung: Folgt daraus, dass es ein Pullback einer Faserung ist.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) & \longrightarrow & E \\ p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))} \downarrow & & \downarrow p \\ B_0 \cong i_{B_0}(B_0) & \longrightarrow & B \end{array}$$

- (h) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung über B_0 ist.

Lösung: Folgt aus (d) für das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 E_0 & \xleftarrow{(f)} & p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \\
 & \searrow p_0 & \swarrow p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))} \\
 & & B_0
 \end{array}$$

wobei die Voraussetzungen nach Annahme, (f) und (g) gelten.

- (i) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.

Lösung: Sei $r: p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \times I \rightarrow (p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \times \{0\}) \cup_{(h)} (E_0 \times I)$ die Retraktion über B aus (h). Dann ist

$$\begin{aligned}
 (X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))) \times I &\longrightarrow (X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))) \times \{0\} \cup_{(i)} (X_0 \times_B E_0) \times I \\
 ((x_0, e), t) &\longmapsto (x_0, r(e, t))
 \end{aligned}$$

ein Deformationsretrakt, der zeigt, dass die Abbildung in (i) eine Kofaserung ist.

(Aufgabenteil (h) war nötig, damit die Abbildung auf dem Faserprodukt über B_0 wohldefiniert ist. Da die Abbildungen keine Namen bekommen haben wurden die Abbildungen/Abbildungszylinder mit ihren Aufgabennamen bezeichnet.)

- (j) Zeigen Sie, dass $\bar{p}: X \times_B E \rightarrow X$ eine Faserung ist.

Lösung: Folgt daraus, dass es ein Pullback einer Faserung ist.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_B E & \longrightarrow & E \\
 \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\
 X & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

- (k) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.

Lösung: Folgt aus (a) für die Kofaserung $i_{X_0}: X_0 \hookrightarrow X$ und Faserung $\bar{p}: X \times_B E \rightarrow X$ aus (j), da $\bar{p}^{-1}(i_{X_0}(X_0)) = X_0 \times_B p^{-1}(B_0)$.

Endlich folgt das Finale:

- (l) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.

Lösung: Folgt, da die Abbildung eine Komposition von Kofaserungen ist.

$$X_0 \times_{B_0} E_0 \xrightarrow{(i)} X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \xrightarrow{(k)} X \times_B E$$

- (m) Folgern Sie, dass das Produkt zweier Kofaserungen eine Kofaserung ist (Blatt 3, Aufgabe 3(a)).

Lösung: Folgt aus der Anwendung von (l) auf das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & * & \longleftarrow & B \\
 f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\
 X & \longrightarrow & * & \longleftarrow & Y
 \end{array}$$