# Lösung zu Blatt 4, Aufgabe 3: „Satz von Kieboom“

## 3 | Satz von Kieboom ★

Ziel dieser Aussge ist eine Verallgemeinerung von Blatt 3 Aufgabe 3(a) zu zeigen (Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen, siehe (l) und (m)).

Zur Vorbereitung:

(a) Sei $i_a\colon A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung und $p\colon E \to B$ eine Faserung. Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_A(A)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
(Hinweis: Die Abbildung $u\colon B \to I$ in der Definition eines UDRs kann „besser“ gewählt werden.)
*Lösung:* Weil $i_a\colon A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung ist, gibt es eine Homotopie $H\colon B \times I \to B$ und ein $u\colon B \to I$ mit

$$\begin{aligned}
&H(-,0) = \mathrm{id}_B, \\
&H(x,t) \in i_A(A) && \forall t > u(x), \\
&H(a,-) = a && \forall a \in i_A(A), \\
&i_A(A) = u^{-1}(\{0\}).
\end{aligned}$$

Die Existenz der hier verwendeten Funktion $u\colon B \to I$ folgt aus dem Beweis der Vorlesung. Da $p\colon E \to B$ eine Faserung ist, gibt es eine Abbildung $\overline{H}\colon E \times I \to E$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\mathrm{id}_E"] \arrow[d, "i_0"] & & E \arrow[d, "p"] \\
E \times I \arrow[r, "p\times\mathrm{id}_I"'] \arrow[urr, dashed, "\overline{H}"] & B \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

Definiere jetzt die folgenden Abbildungen, die zeigen, dass $p^{-1}(i_A(A)) \hookrightarrow E$ ein Umgebungsdeformationsretrakt, also eine Kofaserung, ist.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}\colon E \times I \to E, && (e,t) \mapsto \overline{H}\left(e, \min\{t, u(p(e))\}\right), \\
&\widetilde{u}\colon E \to I, && e \mapsto u(p(e)).
\end{aligned}$$

Wir überprüfen die Umgebungsdeformationsretraktsbedingungen:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}(e,0) = \overline{H}(e,0) = e, \\
&\widetilde{H}(e,1) = \overline{H}(e, u(p(e))) \in p^{-1}(i_A(A)) && \forall e \in p^{-1}(u^{-1}([0,1))), \\
&\widetilde{H}(e,t) = \overline{H}(e, \min\{t, \underbrace{u(p(e))}_{=0}\}) = \overline{H}(e,0) = e && \forall e \in p^{-1}(i_A(A))\ \forall t, \\
&\widetilde{u}^{-1}(\{0\}) = \{e \in E \mid \widetilde{u}(e) = u(p(e)) = 0\} = p^{-1}(i_A(A)), \\
&\widetilde{u}^{-1}([0,1)) = p^{-1}(u^{-1}([0,1]))),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Aussage gilt, weil $i_A(A)$ abgeschlossen ist.

(b) Seien $j\colon B \to A$ und $i\colon A \to X$ Abbildungen, wobei $i$ und $i \circ j$ Kofaserungen sind. Zeigen Sie, dass $j$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Wir zeigen die Homotopieerweiterungseigenschaft für $j$. Betrachte dafür folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "j"'] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\
A \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Weil $i\colon A \to X$ eine Kofaserung ist, gibt es eine offene Umgebung $i(A) \subseteq U \subseteq X$ und eine Retraktion $r\colon U \to A$, also $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $i \circ r \simeq \mathrm{id}_U$. Betrachte nun folgendes Diagramm,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "j"] \arrow[dd, dashed, bend right, "i\circ j"'] & Y^I \arrow[dd, "\mathrm{ev}_0"] \\
A \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
U \arrow[r, "f\circ r"'] \arrow[u, dashed, bend right, "r"'] \arrow[uur, dashed, "G"] & Y
\end{tikzcd}$$

wobei der Lift $G\colon U \to Y^I$ existiert, da $i \circ j$ eine Kofaserung ist. Ein Lift im ursprünglichen Diagramm ist durch $G \circ i\colon A \to Y^I$ gegeben, da

$$\begin{aligned}
&(G \circ i) \circ j = H, \\
&\mathrm{ev}_0 \circ (G \circ i) = (\mathrm{ev}_0 \circ G) \circ i = f \circ r \circ i = f.
\end{aligned}$$

(c) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i\colon A \to X$ ein (starker) Deformationsretrakt und $p\colon E \to B$ eine Faserung ist. Zusätzlich gebe es ein $u\colon X \to I$ mit $u^{-1}(\{0\}) = A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass ein Lift $H\colon X \to E$ existiert.
*Lösung:* Da $i\colon A \to X$ ein starker Deformationsretrakt ist, gibt es ein $r\colon X \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $i \circ r = H(-,0) \simeq_A H(-,1) = \mathrm{id}_X$ für eine Homotopie $H\colon X \times I \to X$. Definiere die Abbildung:

$$\widetilde{H}\colon X \times I \to X, \qquad (x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, t/u(x)), & t < u(x) \\ H(x,1), & t \geq u(x) \end{cases}$$

Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & A \arrow[r, "f"] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"'] \arrow[urr, dashed, "\overline{H}"] & X \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm kommutiert, weil

$$(g \circ \widetilde{H} \circ i_0)(x) = g(\widetilde{H}(x,0)) = \begin{cases} g(H(x,0)), & x \notin i(A) \\ g(H(x,1)), & x \in i(A) \end{cases} = (g \circ i \circ r)(x) = (p \circ f \circ r)(x).$$

Die Abbildung $\overline{H}\colon X \times I \to E$ existiert, weil $p\colon E \to B$ eine Faserung ist. Der gewünschte Lift ist gegeben durch,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}(-{,}u(-))"] & B
\end{tikzcd}$$

weil

$$\begin{aligned}\overline{H}(i(a), u(i(a))) &= \overline{H}(i(a), 0) = f(r(i(a))) = f(a),\\ p(\overline{H}(x, u(x))) &= g(\widetilde{H}(x, u(x))) = g(H(x, 1)) = g(x).\end{aligned}$$

(d) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i\colon A \to X$ eine Kofaserung und $p_A$, $p_X$ Faserungen sind:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, two heads, "p_A"'] & & X \arrow[dl, two heads, "p_X"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Folgern Sie, dass $i\colon A \to X$ eine Kofaserung über $B$ ist, d.h. eine Retraktion $r\colon X \times I \to M_i$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mathrm{id}_{M_i}"] \arrow[d] & M_i \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r, "p_X \circ \mathrm{pr}_1"'] \arrow[ur, dashed, "r"] & B \end{tikzcd}$$

*Lösung:* Faktorisiere $i\colon A \to X$ durch den Abbildungszylinder als $A \xrightarrow{j} M_i \xrightarrow{q} X$, wobei $j$ eine Kofaserung ist, und $q$ eine Homotopieäquivalenz und Faserung. Das folgende Diagramm erfüllt die Bedingung für (c) ($j$ ist ein (starker) Deformationsretrakt, weil $i$ eine Kofaserung ist, und $p_X \circ q$ eine Faserung als Verknüpfung von Faserungen):

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mathrm{id}_{M_i}"] \arrow[d, "j"'] & M_i \arrow[d, "p_X \circ q"] \\ X \times I \arrow[r, "p_X \circ \mathrm{pr}_1"'] \arrow[ur, dashed, "r"] & B \end{tikzcd}$$

Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook, "i_{X_0}"'] & B_0 \arrow[d, hook, "i_{B_0}"'] & E_0 \arrow[l, two heads, "p_0"'] \arrow[d, hook, "i_{E_0}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B & E \arrow[l, two heads, "p"] \end{tikzcd}$$

wobei $i_{X_0}$, $i_{B_0}$, $i_{E_0}$ Kofaserungen, und $p_0$, $p$ Faserungen sind.

(e) Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Folgt aus (a) für die Kofaserung $i_{B_0}\colon B_0 \to B$ und die Faserung $p\colon E \to B$.

(f) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Folgt aus (b) für $E_0 \to p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ (Voraussetzungen: Annahme und (e))

(g) Zeigen Sie, dass $p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}\colon p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \to B_0$ eine Faserung ist.
*Lösung:* Folgt daraus, dass es ein Pullback einer Faserung ist.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \arrow[r] \arrow[d, "p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ B_0 \cong i_{B_0}(B_0) \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

(h) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung über $B_0$ ist.

*Lösung:* Folgt aus (d) für das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[rr, hook, "(f)"] \arrow[dr, two heads, "p_0"'] & & p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \arrow[dl, two heads, "p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}"] \\ & B_0 & \end{tikzcd}$$

wobei die Voraussetzungen nach Annahme, (f) und (g) gelten.

(i) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Sei $r\colon p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \times I \to (p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \times \{0\}) \cup_{(h)} (E_0 \times I)$ die Retraktion über $B$ aus (h). Dann ist

$$\begin{aligned} \big(X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))\big) \times I &\longrightarrow \big(X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))\big) \times \{0\} \cup_{(i)} (X_0 \times_B E_0) \times I \\ ((x_0, e), t) &\longmapsto (x_0, r(e,t)) \end{aligned}$$

ein Deformationsretrakt, der zeigt, dass die Abbildung in (i) eine Kofaserung ist.
(Aufgabenteil (h) war nötig, damit die Abbildung auf dem Faserprodukt über $B_0$ wohldefiniert ist. Da die Abbildungen keine Namen bekommen haben wurden die Abbildungen/Abbildungszylinder mit ihren Aufgabennamen bezeichnet.)

(j) Zeigen Sie, dass $\overline{p}\colon X \times_B E \to X$ eine Faserung ist.
*Lösung:* Folgt daraus, dass es ein Pullback einer Faserung ist.

$$\begin{tikzcd} X \times_B E \arrow[r] \arrow[d, "\overline{p}"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

(k) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Folgt aus (a) für die Kofaserung $i_{X_0}\colon X_0 \hookrightarrow X$ und Faserung $\overline{p}\colon X \times_B E \to X$ aus (j), da $\overline{p}^{-1}(i_{X_0}(X_0)) = X_0 \times_B p^{-1}(B_0)$.

Endlich folgt das Finale:

(l) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.
*Lösung:* Folgt, da die Abbildung eine Komposition von Kofaserungen ist.

$$X_0 \times_{B_0} E_0 \xhookrightarrow{\text{(i)}} X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \xhookrightarrow{\text{(k)}} X \times_B E$$

(m) Folgern Sie, dass das Produkt zweier Kofaserungen eine Kofaserung ist (Blatt 3, Aufgabe 3(a)).
*Lösung:* Folgt aus der Anwendung von (l) auf das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & * \arrow[d, hook] & B \arrow[l, two heads] \arrow[d, hook, "g"] \\ X \arrow[r] & * & Y \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$