Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
19.11.2024

Topologie I
Blatt 5

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

1 | Stegreiffragen: Faserbündel

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Jede Faserung ist ein Faserbündel.
(b) Wahr oder falsch: Sind $p_i \colon E_i \to B_i$ Faserbündel, so ist auch $p_1 \amalg p_2 \colon E_1 \amalg E_2 \to B_1 \amalg B_2$ ein Faserbündel.

2 | Hopfbündel

Betrachte den reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ und den komplexen projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $S^n \to \mathbb{RP}^n$ ein Faserbündel mit Faser S^0 ist.
(b) Zeigen Sie, dass $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ ein Faserbündel mit Faser S^1 ist.
(c) Zeigen Sie, dass es ein Faserbündel $S^1 \to S^1$ mit Faser S^0 gibt.
(d) Zeigen Sie, dass es ein Faserbündel $S^3 \to S^2$ mit Faser S^1 gibt.
(Geben Sie die Abbildung explizit an.)

3 | Wo sind alle meine Schnitte?

Sei $p \colon E \to B$ ein Faserbündel. Eine Abbildung $s \colon B \to E$ mit $p(s(x)) = x$ für alle $x \in B$ heißt Schnitt von p.

(a) Finden Sie ein Faserbündel $p \colon E \to B$, das keinen Schnitt besitzt.

Definiere nun für eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \colon \quad \mathrm{Open}(Y)^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set}, \\ U \subseteq Y \text{ offen} &\longmapsto \{s \colon U \to X \mid f \circ s = \mathrm{id}_U\} \\ V \subseteq U \qquad &\longmapsto (\mathrm{res}^U_V \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), s \mapsto s|_V) \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein Funktor ist.
(c) Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\mathrm{res}^U_{U_i}(s) = \mathrm{res}^U_{U_i}(t)$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass dann $s = t$ gilt.
(d) Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\mathrm{res}^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \mathrm{res}^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$. Zeigen Sie, dass es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ gibt mit $\mathrm{res}^U_{U_i}(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Wieder zurück zu Faserbündeln $p \colon E \to B$.

(e) Zeigen Sie, dass $p \colon E \to B$ lokale Schnitte besitzt, d.h. für jeden Punkt $x \in B$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq B$ mit $\mathcal{F}(U) \neq \emptyset$.