Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
26.11.2024

Topologie I
Blatt 6

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Faserungen und ...

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: $\mathrm{pr}_1\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ oder } x = y\} \to \mathbb{R}$ ist eine Faserung.
(b) Was ist die universelle Eigenschaft des Smash-Produkts? (Kommt Ihnen diese bekannt vor?)

2 | Smash-Produkte

Seien X, Y, Z Objekte in $\mathbf{Top}_*$.

(a) Zeigen Sie, dass es folgende natürliche Isomorphien gibt:
  (i) $(X \times Y)_+ \cong X_+ \wedge Y_+$
  (ii) $X \wedge Y \cong Y \wedge X$
  (iii) $* \wedge X \cong *$
  (iv) $S^0 \wedge X \cong X$
  (v) $X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
  (vi) $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$
(b) Zeigen Sie, dass die Assoziativität (vi) für $X = Y = (\mathbb{Q}, 0)$ und $Z = (\mathbb{Z}, 0)$ nicht gilt.
(Hinweis: $\mathbb{Z}$ ist lokal kompakt, aber $\mathbb{Q}$ nicht. Betrachten Sie die Quotientenabbildungen.)

3 | Kokomposition

Seien X, Y, Z, T Objekte in $\mathbf{Top}_*$ und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Morphismen.

(a) Zeigen Sie, dass $[Z,T] \xrightarrow{g^*} [Y,T] \xrightarrow{f^*} [X,T]$ genau dann eine exakte Sequenz von punktierten Mengen ist, wenn für alle $t\colon Y \to T$ gilt:

$$t \circ f \simeq \mathrm{const}_* \quad \Leftrightarrow \quad \exists \bar{t}\colon Z \to T :\ \bar{t} \circ g \simeq t$$