Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
03.12.2024

Topologie I
Blatt 7

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Höhere Homotopiegruppen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Was ist $\pi_i(S^1)$?
(b) Was ist die „Randabbildung" $\pi_1(S^1) \to \pi_0(S^0)$ für die Hopf-Faserung $S^0 \to S^1 \to S^1$?
(c) Was ist die „Randabbildung" $\pi_1(S^1) \to \pi_0(\mathbb{Z})$ für die universelle Überlagerung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1$?
(d) Wahr oder falsch: X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ mit $f_*\colon \pi_i(X) \xrightarrow{\cong} \pi_i(Y)$ für alle i, dann gilt $X \simeq Y$.

2 | Warum sind S^2 und S^3 so ähnlich?

Ziel dieser Aufgabe ist der Vergleich der Homotopiegruppen von S^2 und S^3.

(a) Berechnen Sie $\pi_0(S^2)$ und $\pi_0(S^3)$.
(b) Berechnen Sie $\pi_1(S^2)$ und $\pi_1(S^3)$.
(c) Berechnen Sie $\pi_2(S^2)$ und $\pi_2(S^3)$.
(d) Zeigen Sie $\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$ für $i \geq 3$.

(Hinweis: Falls Sie nicht alle Gruppen bestimmen können, berechnen Sie alle Homotopiegruppen in Abhängigkeit eines einzelnen Moduls A (die Berechnung von A wird sehr bald sehr leicht sein).)

3 | Eckmann-Hilton = Hilton-Eckmann

Sei M eine Menge mit binären Operationen $- \circ -\colon M \times M \to M$ und $- \otimes -\colon M \times M \to M$ mit

(i) Unitarität: es gibt $1_\circ, 1_\otimes \in M$ mit $m \circ 1_\circ = m = 1_\circ \circ m$ und $m \otimes 1_\otimes = m = 1_\otimes \otimes m$.
(ii) Vertauschung: $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) = (a \circ c) \otimes (b \circ d)$ für alle $a, b, c, d \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass $1_\circ = 1_\otimes$.
(b) Zeigen Sie, dass die Operationen übereinstimmen und kommutativ sind.
(Hinweis: Zeigen Sie $a \circ b = b \otimes a$)
(c) Zeigen Sie, dass die Operation assoziativ ist.

Nun zu den vielfältigen Anwendungen:

(d) Folgern Sie, dass $\pi_i(X)$ für $i \geq 2$ kommutativ ist.
(e) Folgern Sie, dass $\pi_1(X)$ für einen H-Raum X kommutativ ist.
(X H-Raum: es gibt $e \in X$ und $\mu\colon X \times X \to X$ mit $\mu(e, e) = e$ und $\mu(-, e) \simeq_e \mathrm{id}_X \simeq_e \mu(e, -)$)
(f)* Folgern Sie, dass ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Gruppen eine abelsche Gruppe ist.