Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
11.12.2024

Topologie I
Blatt 8

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Sequenzen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Ist $\{*\} \to A \to B$ eine exakte Sequenz in $\mathbf{Top}_*$, so ist $A \to B$ injektiv.
(b) Wahr oder falsch: Ist $A \to B \to \{*\}$ eine exakte Sequenz $\mathbf{Top}_*$, so ist $A \to B$ surjektiv.
(c) Wahr oder falsch: Ist (X, A) ein Paar mit X kontrahierbar, so gilt $\pi_{i+1}(X, A) \cong \pi_i(A)$ für $i \geq 0$.

2 | Homotopiegruppen von Kolimiten

Sei $* \in X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ eine Folge von Räumen in $\mathbf{Top}_*$.

(a) Zeigen Sie, dass für $K \subseteq \operatorname{colim}_i X_i$ kompakt ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $K \subseteq X_n$.
(Hinweis: Diese Aussage gilt für T_1-Räume, d.h. Punkte sind abgeschlossen)
(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{colim}_i \pi_n(X_i, *) \to \pi_n(X, *)$ ein Isomorphismus ist.
(c) Berechnen Sie $\pi_n(S^\infty)$.
(d) Berechnen Sie $\pi_n(\mathbb{RP}^\infty)$.
(e) Berechnen Sie $\pi_n(\mathbb{CP}^\infty)$.

3 | 4-Lemma, aber ohne Gruppenstruktur

Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Betrachte das folgende kommutative Diagramm von exakten Sequenzen. Die vertikalen Abbildungen sind die von f induzierten ($f_*\colon \pi_i(-) \to \pi_i(-)$).

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A,a) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \pi_1(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \pi_1(X,A,a) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \pi_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \pi_0(X) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\pi_1(B,f(a)) \arrow[r] & \pi_1(Y,f(a)) \arrow[r] & \pi_1(Y,B,f(a)) \arrow[r] & \pi_0(B) \arrow[r] & \pi_0(Y)
\end{tikzcd}$$

(a) Seien β, δ surjektiv und ε injektiv. Zeigen Sie, dass γ surjektiv ist.
(b) Seien β, δ injektiv und α surjektiv für alle $a \in A$. Zeigen Sie, dass γ injektiv für alle $a \in A$ ist.
(c) Finden Sie ein Beispiel für ein kommutatives Diagramm von punktierten Räumen von folgender Form

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

sodass beide Zeilen exakte Sequenzen von punktierten Mengen sind, α, β, δ, ε Isomorphismen, aber γ weder injektiv noch surjektiv ist.
