Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
14.01.2025

Topologie I
Blatt 11

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: CW-Komplexe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie sehen alle 1-dimensionalen CW-Komplexe, bis auf Homotopie, aus?
(b) Wahr oder falsch: Sind X und Y CW-Komplexe, so auch $X \vee Y$.
(c) Wahr oder falsch: Für einen CW-Komplex X gilt: $X^0 = \emptyset \;\Leftrightarrow\; X = \emptyset$.
(d) Finden Sie eine CW-Struktur für das Möbiusband $M = [0,1]^2/(0,t) \sim (1, 1-t)$.
(e) Welchen Raum erhalten Sie, wenn Sie eine 2-Zelle entlang des Randes von M einkleben?

2 | Projektive Räume als CW-Komplexe

Betrachte die folgende Filtrierung für den reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^n = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$$\emptyset \subseteq \mathbb{RP}^0 \subseteq \mathbb{RP}^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{RP}^{n-1} \subseteq \mathbb{RP}^n$$

gegeben durch die Inklusionen $\mathbb{RP}^i \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$, $[x_0 : \ldots : x_i] \mapsto [x_0 : \ldots : x_i : 0 : \ldots : 0]$.

Die Anklebeabbildungen seien gegeben durch $q^d(x_1, \ldots, x_d) = [x_1 : \ldots : x_d : 0 : \ldots : 0] \in \mathbb{RP}^{d-1}$ und $Q^d(x_1, \ldots, x_d) = [x_1 : \ldots : x_d : \sqrt{1 - \|(x_1, \ldots, x_d)\|^2} : 0 : \ldots : 0]$.

$$\begin{tikzcd} S^{d-1} \arrow[r, "q^d"] \arrow[d, hook] & \mathbb{RP}^{d-1} \arrow[d, hook] \\ D^d \arrow[r, "Q^d"'] & \mathbb{RP}^d \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Struktur eine CW-Struktur auf $\mathbb{RP}^n$ definiert.

Betrachte die folgende Filtrierung für $\mathbb{CP}^n = \{[z_0 : \ldots : z_n] \mid z_i \in \mathbb{C}\}$

$$\emptyset \subseteq \mathbb{CP}^0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{CP}^{n-1} \subseteq \mathbb{CP}^n$$

gegeben durch die Inklusionen $\mathbb{CP}^i \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$, $[z_0 : \ldots : z_i] \mapsto [z_0 : \ldots : z_i : 0 : \ldots : 0]$.

Die Anklebeabbildungen seien gegeben durch $q^d(z_1, \ldots, z_d) = [z_1 : \ldots : z_d : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{CP}^{d-1}$ und $Q^d(z_1, \ldots, z_d) = [z_1 : \ldots : z_d : \sqrt{1 - \|(z_1, \ldots, z_d)\|^2} : 0 : \ldots : 0]$.

$$\begin{tikzcd} S^{2d-1} \arrow[r, "q^d"] \arrow[d, hook] & \mathbb{CP}^{d-1} \arrow[d, hook] \\ D^{2d} \arrow[r, "Q^d"'] & \mathbb{CP}^d \end{tikzcd}$$

(b) Zeigen Sie, dass die obige Struktur eine CW-Struktur auf $\mathbb{CP}^n$ definiert.

3 | Der Warschauer Kreis ist gar kein Kreis

Der Warschauer Kreis W ist die abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus dem Graphen der auf $(0,1]$ definierten Funktion $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{x})$, $\{0\} \times [-1,1]$ und einem Bogen, der das rechte Ende der Sinuskurve $(1,0)$ mit dem Ursprung $(0,0)$ verbindet.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi_n(W) = 0$ für alle $n \geq 0$.
(Hinweis: Wie sehen Bilder kompakter (wegzusammenhängender) lokal-wegzusammenhängender Mengen in W aus?)

(b) Zeigen Sie, dass W nicht zusammenziehbar ist.
(Hinweis: Wie interagiert die Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ mit $W \to W/\sim \,\cong S^1$?)

(c) Ist W schwach-zusammenziehbar?