Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf **Wintersemester 2024**
Marcus Zibrowius 21.01.2025
Jan Hennig

Topologie I
Blatt 12

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: CW-Komplexe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Für X gibt es einen CW-Komplex C und eine schwache Äquivalenz $X \to C$.
(b) Wahr oder falsch: Für X gibt es einen CW-Komplex C und eine schwache Äquivalenz $C \to X$.
(c) Wahr oder falsch: Es gibt einen CW-Komplex X ohne 3-Zellen mit $\pi_3(X) \neq 0$.

2 | Homotopiegruppen von $S^n \vee S^n$ und $S^n \times S^n$

Sei $i\colon S^n \vee S^n \to S^n \times S^n$ die Inklusion.

(a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_k(S^n \vee S^n) \to \pi_k(S^n \times S^n)$ ein Isomorphismus für alle $k \leq 2n-2$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_{2n-1}(S^n \vee S^n) \to \pi_{2n-1}(S^n \times S^n)$ surjektiv ist.

3 | Eilenberg-MacLane Räume $K(G,n)$

Sei G eine Gruppe und ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass es $K(G,1) \in \mathbf{Top}$ mit $\pi_1(K(G,1)) \cong G$ und $\pi_i(K(G,1)) = 0$ für $i \neq 1$ gibt.
(b) Sei G abelsch. Zeigen Sie, dass es $K(G,n) \in \mathbf{Top}$ mit $\pi_n(K(G,n)) = G$ und $\pi_i(K(G,n)) = 0$ für $i \neq n$ gibt.
(c) Beschreiben Sie $K(\mathbb{Z},1)$, $K(\mathbb{Z},2)$, $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},1)$.

(Hinweis: Seien $r, s \geq 0$. Für r-zusammenhängendes CW-Paar (X,A) mit A s-zusammenhängend gilt $\pi_i(X,A) \cong \pi_i(X/A)$ für $i \leq r+s$.)

4 | Postnikov Turm

Ein Postnikov Turm für einen wegzusammenhängenden Raum X ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & X_2 \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_1
\end{tikzcd}$$

mit

(i) $X \to X_n$ induziert einen Isomorphism $\pi_i(X) \to \pi_i(X_n)$ für $i \leq n$,
(ii) $\pi_i(X_n) = 0$ für $i > n$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden wegzusammenhängenden Raum X einen Postnikov Turm gibt.
(b) Zeigen Sie, dass es einen Postnikov Turm gibt, in dem die Abbildungen $X_n \to X_{n-1}$ Faserungen mit Faser $K(\pi_n(X), n)$ sind.
(c) Sei X nun ein CW-Komplex. Zeigen Sie, dass $X \to \lim\limits_{n} X_n$ eine schwache Äquivalenz ist.