Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
28.01.2025

Topologie I
Blatt 13

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: Eilenberg-MacLane Räume

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

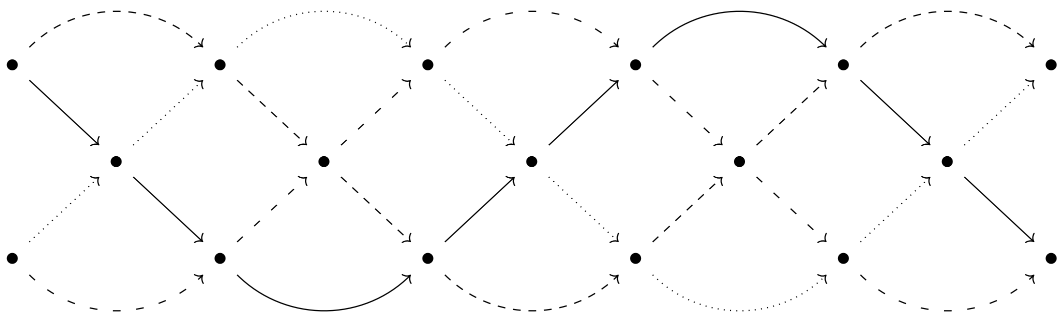
(a) Sei F_k die freie Gruppe auf k Erzeugern. Wie sieht $K(F_k, 1)$ aus?
(b) Wie sieht $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ aus?
(c) Wahr oder falsch: $K(\mathbb{Z}^k, 2) \cong \prod_{i=1}^{k} S^2$
(d) Was ist $\Omega K(G, n)$?

2 | Lange exakte Sequenz von Tripeln

Seien $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $A \hookrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist, $H_k(X, A) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Betrachte das folgende kommutative Diagramm von vier verwobenen Kettenkomplexen.



(b) Zeigen Sie, dass wenn drei der vier Sequenzen exakt sind, so auch die vierte.
(c) Seien $B \subseteq A \subseteq X$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz exakt ist

$$\ldots \longrightarrow H_k(X, B) \longrightarrow H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} H_{k-1}(A, B) \longrightarrow \ldots,$$

wobei das Differential $\partial_k^{(X,A,B)}\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(A, B)$ die Verknüpfung des Differentials für das Paar (X, A) und der Abbildung aus der langen exakten Sequenz für (A, B) ist, und die anderen Abbildungen durch die entsprechenden Inklusionen induziert sind.

3 | Homologiegruppen von Einhängungen

Sei $\Sigma X = (X \times [-1, 1])/\sim$ für $(x, -1) \sim (x', -1)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ die (nicht reduzierte) Einhängung.

(a) Zeigen Sie, dass es Isomorphismen $H_k(X, \{x_0\}) \to H_{k+1}(\Sigma X, \{(x_0, 0)\})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt.
(b) Zeigen Sie, dass $H_k(S^n) \cong H_{k-n}(*) \oplus H_k(*)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.
(Hinweis: Überlegen Sie, wie sich $H_k(X)$ in Abhängigkeit von $H_k(X, \{*\})$ ausdrücken lässt)