Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf **Winter 2026/27**
Marcus Zibrowius 30.10.2026
Jan Hennig

Einführung in die Topologie
Blatt 2

---

1 | Stegreiffragen: Homöomorphie und Pullbacks

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welche Buchstaben des deutschen (griechischen, ...) Alphabets sind zueinander homöomorph?
(b) Betrachte die Kategorie $\mathcal{C}$ in der die Objekte natürliche Zahlen sind mit

$$|Hom_{\mathcal{C}}(m,n)| = \begin{cases} 1, & m|n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Was ist der Pullback zweier Morphismen in $\mathcal{C}$? Was ist der Pushout?
(c) Beschreiben Sie den Grafen einer Abbildung $f\colon X \to Y$ als Pullback.
(d) Hängt der Pullback von $X \to B \leftarrow Y$, von der Topologie auf B ab?

2 | Koendlich

Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heiße *koendlich* wenn $X \setminus U$ endlich ist. Sei $\mathcal{U}$ das System der Teilmengen von X, die entweder leer oder koendlich sind.

(a) Wahr oder falsch: $\mathcal{U}$ ist eine Topologie auf X.

3 | Pullpullbackback

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass Pullbacks transitiv sind.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array}$$

(a) Sei h ein Pullback von i entlang f und i ein Pullback von j entlang g. Zeigen Sie, dass h ein Pullback von j entlang $g \circ f$ ist.
(Extra: Gilt allgemein „sind zwei der Rechtecke Pullbacks, so auch das Dritte“?)
(b) Folgern Sie, dass die Faser von i über einem Punkt $y \in Y$ homöomorph zur Faser von j über $g(y)$ ist.

4 | Projektionen

Seien X und Y topologische Räume.

(a) Wahr oder falsch: Die Projektion $pr_X\colon X \times Y \to Y$ ist abgeschlossen.
(b) Wahr oder falsch: Die Projektion $pr_X\colon X \times Y \to Y$ ist offen.

5 | Kegeln

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon X \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch $(x,t) \mapsto ((1-t)x, t)$ gegeben. Sei Bild(f) das Bild, also die Menge $f(X \times [0,1]) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ausgestattet mit der Unterraumtopologie.

(a) Wahr oder falsch: $: X \times [0,1] \to$ Bild(f) ist eine Identifizierung.